Algebra II - 13 Novembre 2015
Tracce delle soluzioni

Esercizio 1. Siano $N \subsetneq M$ A-moduli. Supponiamo che N goda della seguente proprietà:

$am \in N, a \in A, m \in M \setminus N \Longrightarrow \exists\, n \in \mathbb{N}_+$ t.c. $a^n M \subset N$

i) Provare che $\mathfrak{q}_N = \{a \in A \mid aM \subset N\}$ è un ideale primario.

ii) Sia $\mathfrak{p}_N = \sqrt{\mathfrak{q}_N}$. Se $a \in A$, $m \in M$ e $am \in N$ allora $a \in \mathfrak{p}_N$ oppure $m \in N$.

Dimostrazione. i) $\mathfrak{q}_N$ è ovviamente un ideale e, dato che $N \neq M$ allora $1 \notin \mathfrak{q}_N$ e quindi è proprio. Siano ora $a, b \in A$ tali che $ab \in \mathfrak{q}_N$ e $b \notin \mathfrak{q}_N$. Allora $bM \not\subset N$ ed esiste $m \in M$ tale che $bm \notin N$ ma $a(bm) \in N$. Per le ipotesi su N, per qualche n, $a^n M \subset N$, ossia $a^n \in \mathfrak{q}_N$ e $\mathfrak{q}_N$ è primario.
ii) Se $m \in N$ allora $am \in N$. Se invece $m \notin N$ allora, per le ipotesi su N, esiste $n > 0$ tale che $a^n M \subset N$, ossia $a \in \mathfrak{p}_N$.

Esercizio 2. Siano G e H $\mathbb{Z}$-moduli, determinare la struttura di $G \otimes H$ in ognuno dei seguenti casi:

i) G e H sono ciclici infiniti.

ii) G e H sono ciclici finiti.

iii) G è ciclico finito e H è ciclico infinito.

iv) G e H sono finitamente generati

v) G e H sono liberi.

Soluzione i) Se G e H sono ciclici infiniti, si ha $G \cong H \cong \mathbb{Z}$. Allora $G \otimes_{\mathbb{Z}} H \cong \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}$ e quindi è ciclico infinito
ii) G e H sono ciclici finiti allora esistono $m, n \in \mathbb{Z}$ tali che $G \cong \mathbb{Z}/(m)$ e $H \cong \mathbb{Z}/(n)$. Allora Allora $G \otimes_{\mathbb{Z}} H \cong \mathbb{Z}/(m) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/(n) \cong \mathbb{Z}/(\gcd(m,n))$ e quindi è ciclico finito
.
iii) G è ciclico finito e H è ciclico infinito, allora $G \cong \mathbb{Z}/(m)$ e $H \cong \mathbb{Z}$. Allora $G \otimes_{\mathbb{Z}} H \cong \mathbb{Z}/(m) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/(m)$ e quindi è ciclico finito .
iv) Se G e H sono finitamente generati da elementi $\{g_1, .., g_m\}$ e $\{h_1, .., h_n\}$ rispettivamente allora ogni tensore elementare $g \otimes h = \sum_k a_k g_k \otimes \sum_s b_s h_s = \sum_k \sum_s a_k b_s (g_k \otimes h_s)$ è generato dagli elementi $g_k \otimes h_s$. Da questo segue che $G \otimes H$ è finitamente generato, (dato che è generato dai tensori elementari).
v) Se G e H sono liberi allora esistono I e I' insiemi di indici tali che $G \cong \oplus_I \mathbb{Z}$ e $H \cong_{I'} \mathbb{Z}$, ma allora $G \otimes H \cong (\oplus_I \mathbb{Z}) \otimes (\oplus_{I'} \mathbb{Z}) \cong \oplus_{I \times I'} \mathbb{Z}$ e quindi è libero.

Esercizio 3. Dire quali delle seguenti affermazioni è vera e quale è falsa. Provare o dare un controesempio:

1. Se $I, J \subset A$ sono ideali $\sqrt{I : J} = \sqrt{I} : \sqrt{J}$?

2. Sia A commutativo con identità e $I \subset A$ un ideale contenuto in ogni ideale massimale di A. Se M è un A modulo finitamente generato tale che $A/I \otimes_A M = 0$ allora $M = 0$.

3. Se A è un anello e $I \subset A$ un ideale. Se $\mathfrak{N}(A/I) = 0$ allora I è primo, ($\mathfrak{N}(A/I)$ è il nilradicale di A/I).

4. Se $S = \{36^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $T = \{4^n 9^m\}_{n,m\in\mathbb{N}}$ allora $S^{-1}\mathbb{Z} = T^{-1}\mathbb{Z}$.

Soluzione 1. FALSA. Consideriamo gli ideali $(24), (6)$ in $\mathbb{Z}$,
si ha $\sqrt{(24):(6)} = \sqrt{(4)} = (2) \neq \sqrt{(24)} : \sqrt{(6)} = (6):(6) = (1)$.
2. VERA. Abbiamo $A/I \otimes M \cong M/IM = 0$, da cui $M = IM$ dato che $I \subset \mathfrak{J}(A)$ e M è finitamente generato, per Nakayama, $M = 0$.
3. FALSO. $\mathfrak{N}(A/I) = 0$ significa che $I = \sqrt{I}$. Ad esempio $\mathfrak{N}(\mathbb{Z}/(6)) = 0$ ma (6) non è primo in $\mathbb{Z}$.
4. VERO. Si ha $S \subset T$ e ogni elemento di T è invertibile in $S^{-1}\mathbb{Z}$, infatti

$$\frac{t}{1} = \frac{4^n 9^m}{1} = \frac{36^k}{4^{k-n}9^{k-m}}, \quad \text{con} \quad k = \max(m, n).$$

Osserviamo anche che se $V = \{2^n 3^m\}_{n,m\in\mathbb{N}}$ si ha $S^{-1}\mathbb{Z} = T^{-1}\mathbb{Z} = V^{-1}\mathbb{Z}$.

Esercizio 4. Determinare la struttura del gruppo abeliano G definito da generatori $\{g_1, g_2, g_3\}$ con relazioni $3g_1 + 9g_2 + 9g_3 = 0$ e $9g_1 - 3g_2 + 9g_3 = 0$. Trovare i possibili ordini degli elementi di G. Gli elementi hanno tutti ordine finito?
Soluzione Siano $h_1 = 3g_1 + 9g_2 + 9g_3$ e $h_2 = 9g_1 - 3g_2 + 9g_3$ e $f : \mathbb{Z}^2 \longrightarrow G$ l'omomorfismo dato da $f(e_i) = h_1$ e $f(e_2) = h_2$. Si ha $G \cong \mathbb{Z}^3/\ker(f)$, quindi calcoliamo la forma di Smith della seguente matrice

$$\text{Smith}\begin{pmatrix} 3 & 9 \\ 9 & -3 \\ 9 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 6 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

da cui segue che $G \cong \mathbb{Z}/(3) \oplus \mathbb{Z}/(6) \oplus \mathbb{Z}$. I possibili ordini sono allora $1, 2, 3, 6$, ma esistono anche elementi di ordine infinito.

Esercizio 5. Sia $I = (x^2 - yz + y^2, xyz - x) \subset \mathbb{C}[x, y, z]$.

i) Trovare una base di Gröbner ridotta di I, rispetto all'ordinamento lessicografico con $x > y > z$.

ii) Trovare le componenti irriducibili di $V(I)$.

iii) $f = x^2y + x + y + 1 \in \sqrt{I}$?

iv) $J = I\mathbb{C}[x, y, z]_{(x,y)}$ è un ideale proprio? $\frac{f}{1} \in J$?

Soluzione i) $G = (x^2+y^2-yz, xyz-x, y(y-z)(yz-1))$.
ii) Si ha $V(I) = V(\sqrt{I})$. Calcoliamo

$$\sqrt{I} = \sqrt{(I, y)} \cap \sqrt{(I, y-z)} \cap \sqrt{(I, yz-1)} =$$

$$\sqrt{(x, y)} \cap \sqrt{((x^2, xz^2 - x, y - z)} \cap \sqrt{(x^2 + y^2 - 1, yz - 1)} =$$

Gli ideali $\sqrt{(x, y)} = (x, y)$ e $\sqrt{(x^2, xz^2 - x, y - z)} = (x, y - z)$ sono ovviamente primi.
Ma si ha anche $\sqrt{(x^2 + y^2 - 1, yz - 1)} = (x^2+y^2-1, yz-1)$. Infatti $k[x, y, z]/(x^2+y^2-1, yz-1) \cong k[y, \frac{1}{y}][x]/(x^2+y^2-1)$ e quindi l'deale $(x^2+y^2-1, yz-1)$ è primo. Cosí $V(x, y)$, $V(x, y - z)$ e $V(x^2 + y^2 - 1, yz - 1)$ sono le componsenti irriucibili di $V(I)$.
iii) Se $f \in \sqrt{I}$ allora $V(I) \subset V(f)$, ma $(0, 0, 1) \in V(I)$ e $f(0, 0, 1) = 1 \neq 0$.
iv) $I \subset (x, y)$ quindi $J = (x, y)$ è un ideale proprio. Inoltre $f \notin (x, y)$ quindi $\frac{f}{1}$ è invertibile in $\mathbb{C}[x, y, z]_{(x,y)}$ e non appartiene a J.