Algebra II - 16 Febbraio 2016

Tracce delle soluzioni

Esercizio 1. Sia A un anello commutativo con identità Noetheriano e siano $I_1, I_2 \subsetneq A$ ideali. Dimostrare che $I_1 : I_2 = I_1$ se e solo se $I_2 \not\subseteq \mathfrak{p}$ per ogni $\mathfrak{p}$ primo associato di I_1.

Soluzione Innanzittutto, se fosse $I_1 \supseteq I_2$ allora si avrebbe $I_1 : I_2 = A$; pertanto $I_1 \not\supset I_2$. Possiamo ridurci a considerare l'anello $B = A/I_1$ e sia $\mathrm{Ass}(0)$ l'insieme dei primi associati a zero, allora la tesi è equivalente a provare che se $I \neq (0)$, allora $0 :_B I = 0$ se e solo se, per ogni $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(0)$ si ha che $I \not\subseteq \mathfrak{p}$.

Supponiamo che $I \not\subseteq \mathfrak{p}$, per ogni $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(0)$. Se $\mathcal{D}(B) = \cup_{\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(0)}$, è l'insieme dei divisori di zero di B, allora vale che $I \not\subset \mathcal{D}(B)$, (dato che in caso contrario I dovrebbe essere contenuto in uno dei $\mathfrak{p}$) quindi $0 :_B I = 0$.

Viceversa supponiamo che esista un primo $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(0)$ tale che $I \subset \mathfrak{p}$. Dato che l'anello B è noetheriano, sappiamo che esiste $0 \neq x \in B$ tale che $\mathfrak{p} = (0 : x)$ quindi in particolare $x \in (0 :_B I)$ che quindi è diverso da (0).

Esercizio 2. Sia $I \subset A$ un ideale nilpotente e siano M, N A-moduli. Provare che, se $\varphi : M \longrightarrow N$ è un omomorfismo di moduli tale che l'omomorfismo indotto $\overline{\varphi} : M/IM \longrightarrow N/IN$ è surgettivo, allora anche φ è surgettivo.

Soluzione. Considerando l'omomorfismo surgettivo

$$M \longrightarrow M/IM \xrightarrow{\varphi} N/IN$$

otteniamo che $N = \varphi(M) + IN$, ma allora vale anche $N = \varphi(M) + I(\varphi(M) + IN) = \varphi(M) + I^2N$, dato che

$I\varphi(M) \subseteq \varphi(M)$. Iterando n volte, ove n è tale che $I^n = 0$, si ottiene che $N = \varphi(M) + I^n N = \varphi(M)$, e quindi che φ è surgettivo.

Esercizio 3. Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere e quali false. Provare o dare un controesempio.

1. Se M è uno $\mathbb{Z}$-modulo e N è un $\mathbb{Q}$-modulo, allora $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, N) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}, N)$ come gruppi abeliani.
2. Se $(A, \mathfrak{m})$ è un anello Noetheriano locale e $\mathfrak{q}$ è un ideale $\mathfrak{m}$-primario, allora $A/\mathfrak{q}$ è Artiniano.
3. Se M e N sono $\mathbb{Z}$-moduli finitamente generati e $M \oplus M = N \oplus N$, allora $M = N$.
4. Sia $\varphi_c : \mathbb{Z}^3 \longrightarrow \mathbb{Z}^3$, $c \in \mathbb{Z}$, l'omomorfismo definito da
$$\varphi_c(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_3, cx_2 + x_3, x_1 - cx_2 - cx_3), \ \ c \in \mathbb{Z}.$$
Per ogni $c, d \in \mathbb{Z}$, con $c \neq d$, si ha che $\mathrm{Coker}\varphi_c \ncong \mathrm{Coker}\varphi_d$.
5. Siano $I \subseteq J \subset K[x_1, \ldots, x_n]$ ideali e $>$ un ordinamento monomiale. Se $\mathrm{Lt}_>(I) = \mathrm{Lt}_>(J)$ allora $I = J$.

Soluzione

1. Vero. Consideriamo $\psi : \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}, N) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, N)$ definito da $\psi(F)(m) = F(m \otimes 1)$. Questo è un omomorfismo di $\mathbb{Z}$-moduli. Inoltre l'omomorfismo $\varphi : \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, N) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}, N)$ definito da $\varphi(f)(m \otimes q) = qf(m)$ è l'inverso di ψ. Infatti per ogni $m \in M$, $m \otimes q \in M \otimes \mathbb{Q}$, se $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, N)$ e $F \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}, N)$ si ha $(\varphi \circ \psi)(F)(m \otimes q) = (\varphi(\psi(F))(m \otimes q) = q(\psi(F))(m) = qF(m \otimes 1) =$

$F(m\otimes q)$ e $(\psi\circ\varphi)(f)(m) = \psi(\varphi(f))(m) = \varphi(f)(m\otimes 1) = f(m)$. Quindi i due $\mathbb{Z}$-moduli sono isomorfi.

2. Vero. In $A/\mathfrak{q}$ gli ideali primi corrispondono ai primi $\mathfrak{p}$ di A che contengono $\mathfrak{q}$. Dato che $\sqrt{\mathfrak{q}} = \mathfrak{m} = \bigcap_{\mathfrak{p}\supset\mathfrak{q}}\mathfrak{p}$, in $A/\mathfrak{q}$ l'unico primo, che è massimale, è $\mathfrak{m}/\mathfrak{q}$. Pertanto $A/\mathfrak{q}$ è Noetheriano e ha dimensione 0, dunque è Artiniano.

3. Vero. Trattandosi di $\mathbb{Z}$-moduli finitamente generati esistono $m, n, a_1, \ldots, a_s, b_1, \ldots, b_t \in \mathbb{N}$ e numeri primi $p_1, \ldots, p_s, q_1, \ldots, q_t$ tali che $M \cong \mathbb{Z}^m \oplus \mathbb{Z}/({p_1}^{a_1}) \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}/({p_s}^{a_s})$ e $N \cong \mathbb{Z}^n \oplus \mathbb{Z}/({q_1}^{b_1}) \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}/({q_t}^{b_t})$. Ora, se $M \oplus M = N \oplus N$, per l'unicità della scrittura nel teorema fondamentale di struttura, si ha che $2m = 2n$ e quindi $m = n$; esiste inoltre una corrispondenza 1-1 fra i primi e quindi $s = t$ e $p_i = q_i$, $a_i = b_i$ per ogni i.

4. Falso. La matrice associata a φ_c mediante le basi canoniche è
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & c & 1 \\ 1 & -c & -c \end{pmatrix}$$
e pertanto la sua forma di Smith è
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2c - c^2 \end{pmatrix}.$$
Quindi $\mathrm{Coker}\varphi_c \cong \mathrm{Coker}\varphi_d$ se e solo se $c^2 - 2c = d^2 - 2d$, che è vero tutte le volte che $c = 2 - d$.

5. Vero. Proviamo che, per ogni $f \in J$, si ha che $f \in I$. Sia $G = \{g_1, .., g_k\}$ una base di Gröbner di I rispetto a $>$. Se dividiamo f per G otteniamo $f = \sum_i c_i g_i + \sum_\alpha r_\alpha m_\alpha$, dove $\forall \alpha$, $r_\alpha \in K$ e $m_\alpha \notin \mathrm{Lt}(I)$. Dato che $f - \sum_i c_i g_i = \sum_\alpha r_\alpha m_\alpha \in J$ e $\mathrm{Lt}(I) = \mathrm{Lt}(J)$ si deve avere $\sum_\alpha r_\alpha m_\alpha = 0$ e quindi $f = \sum_i c_i g_i \in I$.

Esercizio 4. Sia $I \subset \mathbb{Q}[x, y, z, t]$

$$I = (x^2z - 2xy^3, x^2z - x^2t^3 + 3xy^3, 2x^2t^3 - xy^3)$$

e sia $A = \mathbb{Q}[x, y, z, t]/I$.

1. Trovare il nilradicale $\mathcal{N}(A)$.
2. Trovare l'insieme dei divisori di zero $\mathcal{D}(A)$.
3. Sia $\mathfrak{p} = (x, y, z, t)$ ideali in $\mathbb{Q}[x, y, z, t]$. Trovare gli ideali primi monomiali di $A_\mathfrak{p}$.

Soluzione Calcolando una base di Gröbner di I (con $x > y > z > t$) si ottiene $I = (x^2z, x^2t^3, xy^3)$ quindi I è un ideale monomiale. Sfruttando le proprietà degli ideali monomiali si ottiene la decomposizione primaria di $I = (x) \cap (x^2, y^3) \cap (y^3, z, t^3)$. Dunque i primi associati di I sono $(x), (x, y)$ e (y, z, t) (e tra questi (x), e (y, z, t) sono minimali).
i) Sia $\pi : \mathbb{Q}[x, y, z, t] \longrightarrow A$ la proiezione. Si ha che $\mathcal{N}(A/I) = \sqrt{0} = \pi(\sqrt{I}) = (xy, xz, xt)$.
ii) I divisori di zero sono l'unione dei primi associati a (0) in A sono $\mathfrak{D} = (x)A \cup (x, y)A \cup (y, z, t)A$.
iii) Se $S = \mathbb{Q}[x, y, z, t] \setminus \mathfrak{p}$, gli ideali primi in $A_\mathfrak{p}$ sono in corrispondenza con gli ideali primi di A contenuti in $\pi(\mathfrak{p})$,

ossia sono i primi $\mathfrak{q} \subset \mathbb{Q}[x, y, z, t]$ tali che $\mathfrak{p} \supset \mathfrak{q} \supset \sqrt{I}$ e quindi i primi monomiali sono esattamente $\pi(x)$, $\pi(x, y)$, $\pi(x, y, z)$, $\pi(x, t)$, $\pi(x, y, t)$, $\pi(x, z)$, $\pi(x, z, t)$, $\pi(y, z, t)$ e $\pi(x, y, z, t)$.