Algebra II
I Verifica intermedia - 22 Aprile 2010

Esercizio 1: Consideriamo l'omomorfismo $\phi : \mathbb{Z}^3 \to \mathbb{Z}^3$ definito da $\phi(x, y, z) = (2x + 6z, 2x + 2y - 4z, ax + 8y + 2z)$, con $a \in \mathbb{Z}$.

Determinare la classe di isomorfismo di $\mathrm{coker}(\phi)$ in funzione di a.

Esercizio 2: Sia A un anello, I, J ideali.

1. Se $I \subseteq J$ allora $\sqrt{I} \subseteq \sqrt{J}$.
2. Se A è Noetheriano, $\sqrt{I} = \sqrt{J} \Rightarrow (\exists n \mid I^n \subseteq J)$
3. Dare un esempio di A non noetheriano in cui il risultato precedente è falso.

Esercizio 3: Sia A un anello, I, J, K ideali. Ricordiamo che IJ è l'ideale generato dai prodotti $\{ab \mid a \in I, b \in J\}$. Definiamo $I^{[n]}$ l'ideale generato da $\{a^n \mid a \in I\}$.

1. Dimostrare che, se $A = \mathbb{Q}[x, y]$ e $I = (x, y)$ allora $I^{[2]} = I^2$.
2. Dimostrare che, se $A = \mathbb{Q}[x, y]$ e I un ideale qualunque allora $I^{[2]} = I^2$.
3. Dare un esempio di un anello A e un ideale I per cui $I^{[2]} \neq I^2$.
4. (difficile) Dimostrare che se $A = \mathbb{Q}[x, y]$ e $I = (x, y)$ allora $I^{[n]} = I^n$. (Considerare $(x + ay)^n$ per $n + 1$ valori diversi di a).

Esercizio 4:

- Se A, B, C sono ideali di un anello di polinomi, dimostrare che
$$V(A + BC) = V(A + B) \cup V(A + C).$$
- Sia k un campo qualunque, e $I \subseteq k[x, y, z] = (xy + xz + yz, xyz)$
  1. Dimostrare che la varietà $V = V(I)$ è l'unione dei tre assi coordinati.
  2. Determinare l'ideale J di V.
  3. Verificare che $J \neq I$ e che $J = \sqrt{I}$. (Si suggerisce di calcolare le basi di Gröbner di I e J).

Esercizio 5: Sia C la curva in $\mathbb{C}^3$ definita parametricamente con parametro t da
$$\begin{cases} x = t^2 + t \\ y = t^3 \\ z = t^2 \end{cases}$$

1. Determinare un insieme di generatori dell'ideale di C.
2. Determinare se C incontra la retta che passa per $(1, 0, 0)$ e $(0, 1, 1)$.
3. Determinare il numero di punti dell'intersezione di C col piano di equazioni $y = 1$.