Algebra II – II Verifica, 26 Maggio 2010

Nome: Matricola:

Esercizio 1. Siano A e B anelli commutativi con identita'. Indichiamo con $R = A \times B$ e con $S = \{1\} \times B$. Provare che $S^{-1}R \cong A$.

Esercizio 2. Siano A e B anelli commutativi con identita' e sia $\varphi : A \longrightarrow B$ un omomorfismo. Provare che

i) $\varphi(\mathbf{N}(A)) \subseteq \mathbf{N}(B)$.

ii) Se φ e' surgettivo allora $\varphi(\mathbf{J}(A)) \subseteq \mathbf{J}(B)$.

iii) Dare un controesempio di ii) se φ non e' surgettivo .

($\mathbf{N}$ e $\mathbf{J}$ indicano rispettivamente il nilradicale e il radicale di Jacobson).

Esercizio 3.

i) Siano $f, g \in \mathbb{Z}[x]$ polinomi monici e sia $R(f, g)$ il risultante di f, g.
Provare che se $R(f, g) = p$ con $p \in \mathbb{Z}$ primo allora $(f, g) \cap \mathbb{Z} = (p)$.

ii) Sia $I = (x^2 - 4x + 1, x^2 - x) \subset \mathbb{Z}[x]$.

a. Trovare $I^c = I \cap \mathbb{Z}$

b. Descrivere $\mathbb{Z}[x]/I$.

Esercizio 4. Siano M, N, P $\mathbb{Z}$- moduli.
Provare che se esistono $p, q \in \mathbb{Z}$ primi distinti tali che valga $pN = 0$ e $qP = 0$ allora la successione $0 \longrightarrow N \longrightarrow M \longrightarrow P \longrightarrow 0$ spezza.