**Algebra II – I verfica  20 Aprile 2011 - Traccia delle soluzioni**

**Esercizio 1.** Sia $\phi : \mathbb{Z}^3 \to \mathbb{Z}^3$ l'omomorfismo definito dalla matrice

$$\begin{pmatrix} 8 & 4 & 8 \\ 2 & 2 & 4 \\ a & 2 & 8 \end{pmatrix}$$

con $a$ numero intero. Determinare la classe di isomorfismo di coker($\phi$) in funzione di $a$.

**Soluzione** Indichiamo con $A$ la matrice che definisce $\phi$, con $\Delta_i$ il massimo comun divisore dei determinanti $i \times i$, $i = 1, 2, 3$. Si ha $\Delta_3 = 32$. Distinguiamo i casi $a = 2k + 1$ e $a = 2k$.

Se $a = 2k + 1$, allora $\Delta_1 = 1$ e $\Delta_2 = 2$, quindi la forma di Smith di $A$ e'$diag(1, 2, 16)$ e $coker(\phi) \cong \mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/16$.

Se $a = 2k$, allora $\Delta_1 = 2$. $\Delta_2 = 2$, o $\Delta_2 = 8$ a seconda che $a \equiv 0 \pmod 4$ o $a \equiv 2 \pmod 4$ e quindi nel primo caso si ha che la forma di Smith di $A$ e' $diag(2, 2, 8)$ e $coker(\phi) \cong \mathbb{Z}/2\times\mathbb{Z}/2\times\mathbb{Z}/8$, nel secondo $diag(2, 4, 4)$ e $coker(\phi) \cong \mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/4 \times \mathbb{Z}/4$.

**Esercizio 2.** Siano $\mathbb{Z}$ l'anello degli interi, $\mathbb{Q}$ il campo dei numeri razionali e sia $A = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/(36) \times \mathbb{Q}$.

(i) Trovare il nilradicale di $A$,

(ii) Determinare gli idempotenti di $A$.

(iii) Determinare gli ideali di $A$. Sono tutti principali?

(iv) Determinare gli ideali primi di $A$ e tra questi gli ideali massimali.

**Soluzione** [i)] Poiche' $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$ non hanno nilpotenti diversi da zero, il nilradicale e' costituito dagli elementi della forma $(0, a, 0)$ con $a \in \mathbb{Z}/36$ nilpotente e quindi $\mathfrak{N}(A) = (0) \times (\bar{6}) \times (0)$.

[ii)] Un elemento e' idempotente se e solo se $(a^2, b^2, c^2) = (a, b, c)$, quindi si deve avere $a, c = 0, 1$ e $b^2 \equiv b \pmod{36}$. Dato che $\mathbb{Z}/36 \cong \mathbb{Z}/4 \times \mathbb{Z}/9$ e gli unici idempotenti in $\mathbb{Z}/4$ e $\mathbb{Z}/9$ sono $0, 1$ otteniamo che $b \equiv 0, 1, 9, 28 \pmod{36}$.

[iii)] Gli ideali di $A$ sono della forma $I \times J \times K$ con $I, J, K$ ideali di $\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/36, \mathbb{Q}$ rispettivamente e quindi tutti principali, cosi' $A$ e a ideali principali, (ma non un dominio)

[iv)] Un ideale e' primo se $A/\mathfrak{p}$ e' un dominio quindi si deve avere $\mathfrak{p} = (\mathfrak{n}, 1, 1), (1, \mathfrak{q}, 1), (1, 1, 0)$ con $\mathfrak{n}$ ideale primo di $\mathbb{Z}$ e $\mathfrak{q}$ ideale primo di $\mathbb{Z}/36$ ossia $\mathfrak{q} = (m)$ con $(m, 36) = 1$. Tranne $(0, 1, 1)$ tutti i primi sono massimali.

**Esercizio 3.**Sia $M$ un $A$-modulo finitamente generato e sia $0 \neq N \subset M$ un sottomodulo:

i) provare che $M \ncong M/N$

ii) Trovare un controesempio se $M$ non e' finitamente generato.

**Soluzione** [i)] Se esistesse un isomorfismo $\varphi : M/N \longrightarrow M$ allora $\varphi \circ \pi : M \longrightarrow M/N \longrightarrow M$ sarebbe un endomorfismo surgettivo e quindi iniettivo, ossia $N = 0$ contro le ipotesi.
[ii)] Consideriamo il $K$-modulo $M = k[x_1, x_2, ...]$, l'anello dei polinomi in infinite variabili, e sia $N = (x_1) \subset M$, allora $\varphi : M \longrightarrow M/N \cong K[x_2, x_3, ...]$ dato da $\varphi(x_i) = x_{i+1}$ e' un ismorfismo di $K$-moduli.

**Esercizio 4.** Sia $I \subset \mathbb{C}[x, y]$. Provare che:

i) se $f, g \in \mathbb{C}[x, y]$ sono tali che $(f, g, I) = 1$ allora $(I, f) \cap (I, g) = (I, fg)$

ii) se esistono $f_1 \in I \cap \mathbb{C}[x]$ e $f_2 \in I \cap \mathbb{C}[y]$ liberi da quadrati, allora $I = \sqrt{I}$.

iii) Dato $I = (x^2y - y, xy^2 - x) \subset \mathbb{C}[x, y]$, calcolare $\sqrt{I}$.

**Soluzione** i) Dato che $(f, g, I) = 1$ esistono $a, b \in \mathbb{C}[x, y]$ tali che $af + bg \equiv 1 \pmod{I}$. Se $h \in (I, f) \cap (I, g)$ da $h \equiv h(af + bg) \pmod{I}$ segue che $(I, f) \cap (I, g) \subset (I, fg)$, dato che l'altra inclusione vale sempre si ha la tesi.
ii) Siano $f_1 = \prod(x - \alpha_i)$ e $f_2 = \prod(y - b_j)$ le fattorizzazioni di $f_1$ e $f_2$. Dato che i polinomi sono liberi da quadrati per ogni $i \neq j$ $(x - \alpha_i)$ e $(x - \alpha_j)$ (risp. $(y - \beta_i)$ e $(y - \beta_j)$) sono relativamente primi $\pmod{I}$, allora applicando il punto i) otteniamo che $I = \cap_{i,j}(x - \alpha_i, y - \beta_j)$. Dato che questi ideali sono massimali $I$ e' radicale.
iii) Si ha $I \cap \mathbb{C}[x] = (x^3 - x)$ e $I \cap \mathbb{C}[y] = (y^3 - y)$, da (ii) segue che $I$ e' radicale.

**Esercizio 5.** Sia $I = (x^2 + xy + y^2, xy^2 + 1) \subset \mathbb{Z}/(2)[x, y]$ e siano $f_1 = x^3 + y^5 + xy^2$, $f_2 = y(x^2 + x + y)$. E' vero che $f_1 \equiv f_2 \pmod{I}$?
**Soluzione.** La base di Groebner di $I$ e' $G = (x + y^4 + y, y^6 + y^3 + 1)$, riducendo $f_1 - f - 2$ modulo $G$ si ottiene resto 0, quindi $f_1 \equiv f_2 \pmod{I}$.