Algebra II - II Verifica intermedia
8 Giugno 2011

Esercizio 1: Sia $\phi : A \longrightarrow B$ un omomorfismo di anelli surgettivo. Indichiamo con $\mathfrak{J}(A)$ e $\mathfrak{J}(B)$ i radicali di Jacobson di A e B. Provare che:

(i) $\phi(\mathfrak{J}(A))$ e' un ideale di B e $\phi(\mathfrak{J}(A)) \subset \mathfrak{J}(B)$. Dare un esempio dove non vale l'uguaglianza.

(ii) Se A e' semilocale provare che $\phi(\mathfrak{J}(A)) = \mathfrak{J}(B)$.

Esercizio 2: Siano N_1, N_2 A-moduli. E' vero o falso che:

(i) N_1 e N_2 sono proiettivi se e solo se $N_1 \oplus N_2$ e' proiettivo.

(ii) N_1 e N_2 sono proiettivi se e solo se $N_1 \otimes N_2$ e' proiettivo.

(iii) N_1 e N_2 sono piatti se e solo se $N_1 \oplus N_2$ e' piatto.

(iv) N_1 e N_2 sono piatti se e solo se $N_1 \otimes N_2$ e' piatto.

Dimostrare o dare un controesempio di ogni implicazione.

Esercizio 3: Sia $A = k[x, y]/(x^2 - y^2)$ e siano $\mathfrak{p} = (x + y)A$, e $\mathfrak{q} = (x, y)A$.

i) Provare che $\mathfrak{p}A_{\mathfrak{q}}$ e' un ideale primo.

ii) Quali sono gli ideali primi di $A_{\mathfrak{q}}$?

iii) Descrivere $(A_{\mathfrak{q}})_{\mathfrak{p}A_{\mathfrak{q}}}$

Esercizio 4: Sia $M = \mathbb{Z}/(15)$ e sia $\phi : \mathbb{Z}^2 \longrightarrow \mathbb{Z}^3$ l'omomrfismo dato da $\varphi(x, y) = (4x + 8y, 4x - 4y, 16x + 20y)$.

i) Determinare $N = coker(\varphi)$

ii) Determinare $M \otimes_{\mathbb{Z}} N$

iii) Trovare il minimo numero di generatori di $M \otimes_{\mathbb{Z}} N$