

**Algebra II - I Verifica intermedia**  
**20 Aprile 2012**

**Esercizio 1:** Sia  $M = \mathbb{Z}^3/N$ , con  $N$  sottomodulo generato da  $m_1 = (0, a, b)$ ,  $m_2 = (3, 3, 0)$  e  $m_3 = (3, -1, 0)$ , con  $a, b \in \mathbb{Z}$ . Trovare per quali valori di  $a, b \in \mathbb{Z}$ ,  $\#M$  e' finita e per quali valori  $M$  e' ciclico.

**Esercizio 2:** Sia  $A$  un anello commutativo con identita'. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false. Provare o dare un controesempio.

- (i)  $I \subset A$  ideale proprio e' massimale se e solo se per ogni ideale  $J \subseteq A$  si ha  $J \subseteq I$  o  $I + J = A$ .
- (ii) Se  $P \subseteq A$  e' un ideale primo (proprio) tale che  $A/P$  e' finito allora  $P$  e' massimale.

**Esercizio 3:** Sia  $M$  uno  $\mathbb{Z}$ -modulo ciclico e siano  $N$  e  $P$  sottomoduli di  $M$ . Provare che se esistono  $p, q \in \mathbb{Z}$ ,  $(p, q) = 1$  tali che  $Ann(N) = (p)$  e  $Ann(P) = (q)$  e  $Ann(M) = (pq)$  allora  $M = N \oplus P$ .

**Esercizio 4:** Sia  $I = (y^2 - xz, x^2 - y^2, x^2 - yz) \subset \mathbb{C}[x, y, z]$

- i)  $V(I)$  e' finito?
- ii) trovare le componenti irriducibili di  $V(I)$ .
- iii) Se  $f = y(x^2 + x + y)$  e' vero che  $f \in \sqrt{I}$ ?