Algebra II - II Verifica intermedia
18 Maggio 2012

Esercizio 1: A un dominio a ideali principali e siano $I, J \subset A$ ideali di A. Provare che $(I+J)^2 = I^2 + J^2$;

Esercizio 2: Sia A un anello noetheriano. Provare che se $I \subset A$ e' un ideale tale che $I = I^2$ allora $I = (a)$ con $a \in A$ idempotente.

Esercizio 3: Siano A un anello commutativo con identita' e M un A-modulo. Supponiamo che $\{f_i\}_{i \in I}$ sia un insieme di elementi di A che generano l'ideale (1). Provare che:

a. $\{{f_i}^{n_i}\}_{i \in I}$ generano l'ideale (1) per ogni scelta degli $n_i \in \mathbb{N}$, $i \in T$.

b. Se $m \in M$ e' zero in M_{f_i} per ogni i allora $m = 0$.

Esercizio 4. Siano A un anello commutativo con identita' e K un campo. Decidere quali delle seguenti affermazioni e' vera e quale falsa. Provare se vera, giustificare o dare un controesempio se falsa.

a. Se $A[x, y]$ e' noetheriano allora A e' un anello noetheriano.

b. Sia $B = \mathbb{Z}/18\mathbb{Z}$ e M_1, M_2 i B-moduli $M_1 = 2\mathbb{Z}/18\mathbb{Z}$, $M_2 = 3\mathbb{Z}/18\mathbb{Z}$. M_1 e/o M_2 sono B-moduli proiettivi? M_1 e/o M_2 sono liberi?

c. La successione di $K[x]$-moduli $0 \longrightarrow (x) \longrightarrow K[x] \longrightarrow K \longrightarrow 0$ spezza.