Algebra II - II Verifica intermedia
18 Maggio 2012
Correzione

Esercizio 1: A un dominio a ideali principali e siano $I, J \subset A$ ideali di A. Provare che $(I + J)^2 = I^2 + J^2$;

Soluzione E' sempre vero che $I^2 + J^2 \subseteq (I + J)^2$. per il viceversa sia $I = (a)$, $J = (b =$ e $I + J = (d)$. Dato che $(a, b) = (d)$ possiamo scrivere $a = da_1$ e $b = db_1$ con $(a_1, b_1) = 1 = ({a_1}^2, {b_1}^2)$. Allora esistono x, y tali che $1 = x{a_1}^2 + y{b_1}^2$ e quindi $d^2 = 1d^2 = xa^2 + yb^2 \in I^2 + J^2$.

Esercizio 2: Sia A un anello noetheriano. Provare che se $I \subset A$ e' un ideale tale che $I = I^2$ allora $I = (a)$ con $a \in A$ idempotente.

Soluzione Dato che A e' noetheriano, I e' un A-modulo finitamente generato, allora applicando il lemma di Nakayama otteniamo che esiste un elemento $b \in A$, $b \equiv 1 \pmod{I}$ tale che $bI = 0$. Sia $a = 1 - b \in I$ allora $(a) \subseteq I \subseteq aI \subseteq (a)$ da cui I e' generato da a. Inoltre dato che $a(1-a) = 0$ otteniamo che a e' idempotente.

Esercizio 3: Siano A un anello commutativo con identita' e M un A-modulo. Supponiamo che $\{f_i\}_{i \in I}$ sia un insieme di elementi di A che generano l'ideale (1). Provare che:

a. $\{{f_i}^{n_i}\}_{i \in I}$ generano l'ideale (1) per ogni scelta degli $n_i \in \mathbb{N}$, $i \in T$.
b. Se $m \in M$ e' zero in M_{f_i} per ogni i allora $m = 0$.

Soluzione a. Basta osservare che $(1) = (\{f_i\}_{i \in I}) \subseteq \sqrt{(\{{f_i}^{n_i}\}_{i \in I})}$.

b. Dato che $m_{f_i} = 0$ in M_{f_i} per ogni i, esistono n_i tali che ${f_i}^{n_i} m = 0$ in M, allora $m = 1m = \sum a_i {f_i}^{n_i} m = 0$.

Esercizio 4. Siano A un anello commutativo con identita' e K un campo. Decidere quali delle seguenti affermazioni e' vera e quale falsa. Provare se vera, giustificare o dare un controesempio se falsa.

a. Se $A[x, y]$ e' noetheriano allora A e' un anello noetheriano.
b. Sia $B = \mathbb{Z}/18\mathbb{Z}$ e M_1, M_2 i B-moduli $M_1 = 2\mathbb{Z}/18\mathbb{Z}$, $M_2 = 3\mathbb{Z}/18\mathbb{Z}$. M_1 e/o M_2 sono B-moduli proiettivi? M_1 e/o M_2 sono liberi?
c. La successione di $K[x]$-moduli $0 \longrightarrow (x) \longrightarrow K[x] \longrightarrow K \longrightarrow 0$ spezza.

Soluzione a. Vero. $A \cong A[x, y]/(x, y)$ e' quoziente di un $A[x, y]$- modulo noetheriano quindi noetheriano come $A[x, y]$-modulo e anche come $A[x, y]/(x, y) = A$-modulo.

b. $B \cong \mathbb{Z}/(2) \oplus \mathbb{Z}/(9)$, dato che $M_1 \cong \mathbb{Z}/(2)$ M_1 e' addendo diretto di un modulo libero e quindi proiettivo. Mentre M_2 non lo e' dato che

$M_2 \cong \mathbb{Z}(3)$ che non e' addendo diretto di B. Nessuno dei due moduli e' libero.

c. Falso dato che la struttura di $K[x]$ modulo su K e' tale che $xK = 0$.