Algebra II - I Verifica intermedia
Traccia delle soluzioni
20 Aprile 2011

Esercizio 1: Sia $M = \mathbb{Z}^3/N$, con N sottomodulo generato da $m_1 = (0, a, b)$, $m_2 = (3, 3, 0)$ e $m_3 = (3, -1, 0)$, con $a, b \in \mathbb{Z}$. Trovare per quali valori di $a, b \in \mathbb{Z}$, $\#M$ e' finita e per quali valori, M e' ciclico.

Soluzione. Troviamo la forma di Smith della matrice A le cui colonne sono i vettori m_1, m_2, m_3, ossia $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ a & 3 & -1 \\ b & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Se Δ_i indica il massimo comun divisore dei determinanti $i \times i$ e $S = diag(d_1, d_2, d_3)$ e' la forma di Smith della matrice A si ha: $d_1 = \Delta_1 = 1$,$d_2 = \Delta_2$ e $d_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta_2}$. Si ha $\Delta_2 = (b, 3a, 12), \Delta_3 = 12b$. Quindi affinche' $\#M$ sia finita dobbiamo avere $b \neq 0$. Se $b \neq 0$ affinche' M sia ciclico dovra' essere $d_2 = (b, 3a, 12) = 1$. Dato che $(b, 3a, 12) = (b, 3(a, 4)) = (b, 3)(b, (a, 4))$ e $(a, 4) = 2$ oppure $(a, 4) = 4$ dovremo avere che $b \not\equiv 0 \pmod 3$ e $(a, b) \not\equiv 0 \pmod 2$.

Esercizio 2: Sia A un anello commutativo con identita'. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false. Provare o dare un controesempio.

(i) $I \subset A$ ideale proprio e' massimale se e solo se per ogni ideale $J \subsetneq A$ si ha $J \subseteq I$ o $I + J = A$.

(ii) Se $P \subsetneq A$ e' un ideale primo (proprio) tale che A/P e' finito allora P e' massimale.

Soluzione i) VERO. Sia I massimale. Se $J \not\subset I$ esiste $0 \neq x \in J \setminus I$ e quindi $A = (x, I) \subset I + J$. Viceversa consideriamo A/I e proviamo che ogni elemento diverso da zero e' invertibile. Sia $0 \neq \overline{x} \in A/I$. Dato che $I \subset (x, I)$, per ipotesi $(x, I) = A$ e quindi esistono $y \in A$ e $i \in I$ tali che $xy + i = 1$ da cui $\overline{x}$ e' invertibile modulo I.

ii) VERO. Sia $k = \#A/P$ e sia $0 \neq a \in A/P$. Se $h > k$ esiste $n \leq k$ tale che $a^h = a^n$, dacui segue $a^n(a^{h-n} - 1) = 0$, dato che A/P e' un dominio e $a \neq 0$ questo implica che a e' invertibile e quindi che P e' massimale.

Esercizio 3: Sia M uno $\mathbb{Z}$-modulo ciclico e siano N e P sottomoduli di M. Provare che se esistono $p, q \in \mathbb{Z}$, $(p, q) = 1$ tali che $Ann(N) = (p)$ e $Ann(P) = q$ e $Ann(M) = (pq)$ allora $M = N \oplus P$. Sia M uno $\mathbb{Z}$-modulo e siano N e P sottomoduli di M.

Soluzione Proviamo che $M = pM \oplus qM$ e poi che $n \cong qM$ e $P \cong pM$. Siano $x, y \in \mathbb{Z}$ tali che $xp + yq = 1$, allora $\forall m \in M$ si ha $m = (xp + yq)m = xpm + yqm \in pM + qM$. Vale $pM \cap qM = 0$. Infatti se $m \in pM \cap qM$ allora $Ann(m) = (p, q) = (1)$ e quindi $m = 0$. Proviamo che $qM = N$. Dato che $M =< m >$ e' uno $\mathbb{Z}$-modulo ciclico e $N \subset M$, anche N e' ciclico ed esiste $a \in \mathbb{Z}$ tale che $N =< n >=< am >$. Da $pn = pam = 0$ segue che

$a = qh$ quindi $N \subseteq qM$. Inoltre dato che $Ann(N) = (p)$ si ha $(h,p) = 1$, quindi esistono $u, v \in \mathbb{Z}$ tali che $hu + pv = 1$. Moltiplicando per q questa relazione si ottiene $qm = uhqm \in N$.

Esercizio 5: Sia $I = (y^2 - xz, x^2 - y^2, x^2 - yz) \subset \mathbb{C}[x, y, z]$

i) $V(I)$ e' finito?

ii) trovare le componenti irriducibili di $V(I)$.

iii) Se $f = y(x^2 + x + y)$ e' vero che $f \in \sqrt{I}$?

Soluzione i) La base di Göbner ridotta di I e' data da $(x^2 - yz, xz - yz, y^2 - yz) = (x^2 - yz, (x - y)z, y(y - z)$. Dato che $z^k \notin LT(I)$, $V(I)$ e' infinito.

ii) $V(I) = V(x^2-yz, (x-y)z, y) \cup V(x^2-yz, (x-y)z, y-z) = ... = V(x, y) \cup V(x - z, y - z)$. Dato che gli ideali $I_1 = (x, y)$ e $I_2 = (x - z, y - z)$ sono primi ($\mathbb{C}[x, y, z]/I_i$ e' un dominio) questa e' la decomposizione minimale di $V(I)$ in componenti irriducibil.

ii) Se $f \in \sqrt{I}$ allora $V(f) \supset V(\sqrt{I}) = V(I)$, ma $P = (1, 1, 1) \in V(I)$ e $P \notin V(f)$, quindi $f \notin \sqrt{I}$.