Algebra II - I verifica Intermediai
23 aprile 2013

Esercizio 1. Sia A un anello commutativo con identita'.

i) Se $I, J \subset A$ ideali e $I \subset \mathfrak{J}(A)$ e $(I, J) = 1$ allora $J = (1)$. ($\mathfrak{J}(A)$ e' il radicale di Jacobson di A).

ii) Provare che l'insieme degli ideali primi di A possiede elementi minimali rispetto all'inclusione.

iii) Se A e' ridotto (i.e. $\mathfrak{N}(A) = (0)$) e $a \in A$ e' un divisore di zero, allora a appartiene a uno dei primi minimali di A.

Esercizio 2. Sia $M = \mathbb{Z}^3/N$, con N sottomodulo generato da $m_1 = (2, 4, -4)$, $m_2 = (4, 12, -12)$ e $m_3 = (2, -4, -4)$. Trovare l'annullatore di M.

Esercizio 3. Considerare il diagramma di A-moduli e A-omomorfismi:

$$\begin{tikzcd} & F \arrow[d, "f"] & \\ M \arrow[r, "g"'] & N \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

dove la riga e' esatta. Supponiamo che F sia un A-modulo libero. Provare che esiste un omomorfismo $h : F \to M$ tale che $gh = f$.

Esercizio 4. Dato il sistema:

$$\Sigma = \begin{cases} x^2 - 3xy + y^2 = 0 \\ x^3 - 8x + 3y = 0 \\ x^2y - 3x + y = 0 \end{cases}$$

i) Provare che Σ ha un numero finito di soluzioni in $\mathbb{C}^2$.

ii) Trovare tutte le soluzioni $\beta \in \mathbb{Q}^2$ di Σ

ii) Se $V_{\mathbb{R}}(I) = \{\alpha \in \mathbb{R}^2 \mid \alpha \text{ e' soluzione di } \Sigma\}$, decomporre $V_{\mathbb{R}}(I)$ come unione di varieta' irriducibili.