Algebra II - II Verifica intermedia
30 Maggio 2013

Esercizio 1. Sia $I \subset A$ un ideale, se $\cap_{n\geq 1} I^n = (0)$ allora per ogni $a \in I$, $1+a$ non e' un divisore di zero in A.

Esercizio 2: Provare quali delle seguenti affermazioni sono vere e quali false.

i) Se $M = \mathbb{Z}/(12) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/(30)$ allora $Supp(M) = \{p \in Spec(\mathbb{Z}) \mid M_{(p)} \neq (0)\} = \{(2), (3)\}$.

ii) Se $A = K[x, y]/(xy)$ e $D(A)$ e' l'insieme dei divisori di zero di A, allora $a \notin D(A)$ se e solo se $a \in K$.

iii) Sia K un campo algebricamente chiuso e siano $f, g \in K[x_1, .., x_n]$. Se f e' un polinomio irriducibile e $V(f) \subset V(g)$ allora f divide g.

Esercizio 3: Siano

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{\varphi} N \xrightarrow{f} P \longrightarrow 0$$
$$0 \longrightarrow P \xrightarrow{g} T \xrightarrow{\psi} W \longrightarrow 0$$

due successioni esatte di A moduli, provare che

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{\varphi} N \xrightarrow{gf} T \xrightarrow{\psi} W \longrightarrow 0$$

e' esatta.

Esercizio 4: Sia K un campo e sia $B \subset K$ un anello che non e' un campo. Provare che K non puo' essere un B-modulo finitamente generato. (Suggerimento: Provare prima nel caso in cui B e' un anello locale)

Esercizio 5: Sia $I = (x^2 + y^2, x^3y^3 + y^4) \subset K[x, y]$ e sia $f = x^2 + 5x$.

$f \in \sqrt{I}$? $f \in \sqrt{I_{(x,y)}}$?