Algebra II - II Verifica intermedia
29 Maggio 2014

Esercizio 1. Decidere se le seguenti affermazioni sono vere o false. Provare se vere, dare un controesempio se false.

i) Se P e Q sono due A-moduli proiettivi e sia $\varphi \in \mathrm{Hom}_A(P, Q)$ un omomorfismo di A-moduli surgettivo allora $\mathrm{Ker}(\varphi)$ è proiettivo.

ii) Sia $f \in \mathbb{Q}[x]$ tale che $\gcd(f, f') = 1$, allora in $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}[x]/(f)$ non esistono elementi nilpotenti diversi da zero.

Esercizio 2. i) Sia A un anello e $I \subset A$ un ideale. Consideriamo l'insieme moltiplicativamente chiuso $S = 1 + I \subset A$. Provare che $S^{-1}I$ è contenuto nel radicale di Jacobson di $S^{-1}A$.
ii) Sia $A = \mathbb{Z}/(60)$ e $S = 1 + (15)A$. Trovare tutti gli ideali di $S^{-1}A$, $\mathfrak{N}(S^{-1}A)$ e $\mathfrak{J}(S^{-1}A)$, ($\mathfrak{N}$ e $\mathfrak{J}$ indicano rispettivamente il nilradicale e il radicale di Jacobson).

Esercizio 3. Sia A un anello e $a \in A$. Provare che i seguenti fatti sono equivalenti:

i) $a \in a^2A$.

ii) aA è addendo diretto di A (come A-modulo).

iii) A/aA è un A-modulo piatto.

Esercizio 4. Sia $I = (x^2 - yz + y^2, xyz - x) \subset \mathbb{Q}[x, y, z]$.

i) Trovare una base di Gröbner ridotta di I.

ii) Trovare $J = I \cap \mathbb{Q}[y, z]$

iii) $V(I) \subset \mathbb{Q}^3$ è finito?

iv) Trovare i primi minimali di I.