Algebra II - II Verifica intermedia
Tracce delle soluzioni
29 Maggio 2014

Esercizio 1. Decidere se le seguenti affermazioni sono vere o false. Provare se vere, dare un controesempio se false.

i) Se P e Q sono due A-moduli proiettivi e $\varphi \in Hom_A(P, Q)$ un omomorfismo di A-moduli surgettivo allora $\mathrm{Ker}(\varphi)$ è proiettivo.

ii) Sia $f \in \mathbb{Q}[x]$ tale che $\gcd(f, f') = 1$, allora in $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}[x]/(f)$ non esistono elementi nilpotenti diversi da zero.

Soluzione i)Vero. Dato che Q è proiettivo, la successione esatta

$$0 \longrightarrow \mathrm{Ker}(\varphi) \longrightarrow P \longrightarrow Q \longrightarrow 0$$

spezza e quindi si ha che $P \cong \mathrm{Ker}(\varphi) \oplus Q$, ma allora $\mathrm{Ker}(\varphi)$ è addendo diretto di un modulo proiettivo e quindi è proiettivo.

ii) Vero. Si ha $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}[x]/(f) \cong \mathbb{C}[x]/(f)$. Dato che f è libero da quadrati in $\mathbb{C}[x]$, $f(x) = \prod_1^k (x - \alpha_i)$, con $\alpha_i \neq \alpha_j$ se $i \neq j$.
Quindi $\mathbb{C}[x]/(f) \cong \prod_1^k \mathbb{C}[x]/(x - \alpha_i) \cong \mathbb{C}^k$ e non esistono nilpotenti diversi da zero.

Esercizio 2. i) Sia A un anello e $I \subset A$ un ideale. Consideriamo l'insieme moltiplicativamente chiuso $S = 1+I$. Provare che $S^{-1}I$ è contenuto nel radicale di Jacobson di $S^{-1}A$.
ii) Sia $A = \mathbb{Z}/(60)$ e $S = 1 + (15)A$. Trovare tutti gli ideali di $S^{-1}A$, $\mathfrak{N}(S^{-1}A)$ e $\mathfrak{J}(S^{-1}A)$, ($\mathfrak{N}$ e $\mathfrak{J}$ indicano rispettivamente il nilradicale e il radicale di Jacobson).
Soluzione i) Proviamo che se $\frac{x}{s} \in S^{-1}I$ allora per ogni $\frac{a}{t} \in S^{-1}A$, $1 + \frac{a}{t}\frac{x}{s}$ è invertibile in $S^{-1}A$. Questo segue dal fatto che $1 + \frac{a}{t}\frac{x}{s} = \frac{st+ax}{st}$ e $st + ax \equiv 1 \pmod{I}$.
ii) Gli ideali di $\mathbb{Z}/(60)$ sono generati dai divisori di 60, quindi sono $(0), (2), (4), (3), (5), (6), (12), (10), (20), (15), (30)$. Osserviamo che $n \in (S^{-1}A)^*$ se e solo se $(n, 15) = 1$, quindi gli ideali di $S^{-1}A$ sono $(0) = (15) = (30), (3) = (6) = (12), (5) = (10) = (20)$, da questo segue che $S^{-1}A \cong \mathbb{Z}/(15)$ e quindi $\mathfrak{N}(S^{-1}A) = \mathfrak{J}(S^{-1}A) = (0)$.

Esercizio 3. Sia A un anello e $a \in A$. Provare che i seguenti fatti sono equivalenti:

i) $a \in a^2A$.

ii) aA è addendo diretto di A (come A-modulo).

iii) A/aA è un A-modulo piatto.

Soluzione i) $\Longrightarrow$ ii). Proviamo che la successione

$$0 \longrightarrow < a > \xrightarrow{j} A \xrightarrow{\pi} A/ < a > \longrightarrow 0$$

spezza. Proviamo che esiste $\alpha : A \longrightarrow < a >$ tale che $\alpha \circ j = id_{<a>}$. Dato che $a \in a^2 A$, esiste $b \in A$ tale che $a = ba^2$. Definiamo allora $\alpha(c) = bac \in < a >$. Si ha quindi $\alpha(j(ka)) = k\alpha(a) = kba^2 = ka$ quindi la successione spezza e $A \cong < a > \oplus A/ < a >$.
ii) $\Longrightarrow$ iii). Dato che A è proiettivo anche i suoi addendi diretti sono proiettivi e quindi piatti.
iii) $\Longrightarrow$ i). Dato che $A/ < a >$ è piatto la successione

$$0 \longrightarrow < a > \otimes_A A/ < a > \xrightarrow{j \otimes id} A \otimes_A A/ < a > \xrightarrow{\pi \otimes id} A/ < a > \otimes_A A/ < a > \longrightarrow 0$$

è ancora esatta.
Ma dato che si ha $A \otimes_A A/ < a > \cong A/ < a >$ e $A/ < a > \otimes_A A/ < a > \cong A/ < a >$ allora deve essere $< a > \otimes_A A/ < a > \cong < a > / < a^2 > = (0)$ e quindi $a \in < a^2 >$.

Esercizio 4. Sia $I = (x^2 - yz + y^2, xyz - x) \subset \mathbb{Q}[x, y, z]$.

i) Trovare una base di Gröbner ridotta di I.

ii) Trovare $J = I \cap \mathbb{Q}[y, z])$

iii) $V(I) \subset \mathbb{Q}^3$ è finito?

iv) trovare i primi minimali di I

Soluzione i) Se scegliamo l'ordinamento lessicografico con $x > y > z$, allora $G = (x^2 + y^2 - yz, xyz - x, y(y - z)(yz - 1))$.
ii) $J = (y(y - z)(yz - 1))$.
iii) Si ha

$$\sqrt{I} = \sqrt{(I, y)} \cap \sqrt{(I, y - z)} \cap \sqrt{(I, yz - 1)} =$$
$$\sqrt{(x, y)} \cap \sqrt{((x^2, xz^2 - x, y - z)} \cap \sqrt{(x^2 + y^2 - 1, yz - 1)}$$

Quindi $V(I) = V(\sqrt{I}) \supset V(x, y)$ cosí $V(I) \neq \emptyset$ e $V(I)$ è infinito.
iv) Gli ideali $\sqrt{(x, y)} = (x, y)$ e $\sqrt{((x^2, xz^2 - x, y - z)} = (x, y - z)$ sono ovviamente primi. Ma si ha anche $\sqrt{(x^2 + y^2 - 1, yz - 1)} = (x^2 + y^2 - 1, yz - 1)$. Infatti $k[x, y, z]/(x^2 + y^2 - 1, yz - 1, y - 2) \cong k[y, \frac{1}{y}][x]/(x^2 + y^2 - 1)$ e quindi l'deale $(x^2 + y^2 - 1, yz - 1)$ è primo. I primi minimali di I sono dunque (x, y), $(x, y - z)$ e $(x^2 + y^2 - 1, yz - 1)$.