Algebra II
24 Aprile 2015

Esercizio 1. Siano $I, J \subset A$ ideali di un anello commutativo A:

i) Se $\sqrt{IJ} = A$ allora $I = A$ e $J = A$

ii) Se $\mathfrak{p} \subset A$ è un ideale primo e $IJ = \mathfrak{p}$ allora $I = \mathfrak{p}$ o $J = \mathfrak{p}$,

Esercizio 2. Per ciascuna delle seguenti affermazioni, dire se è vera (e in tal caso provarla) o se è falsa (e in tal caso fornire un controesempio):

1. Sia $I \subset K[x_1, .., x_n]$ e sia $(Lt_>(I))$ il leading term ideal di I rispetto ad un ordinamento monomiale fissato. Se $(Lt_>(I))$ è primario allora I è primario.

2. Sia $\phi : \mathbb{Q}[x]^3 \to \mathbb{Q}[x]^3$ l'omomorfismo definito dalla matrice
$$B = \begin{pmatrix} (x-1) & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & x(x-1)^3 \end{pmatrix}$$
allora $\dim_{\mathbb{Q}} \operatorname{coker}(\phi) = 6$.

3. Sia A un anello. Ogni A-modulo $M \neq 0$ è libero se e solo se A è un campo.

Esercizio 3. Sia A un anello e M un A-modulo. Provare che:

i) se $\varphi \in End_A(M)$ e $\varphi^2 = \varphi$ allora $M \cong \varphi(M) \oplus (id - \varphi)(M)$.

ii) Se M è finitamente generato allora M è proiettivo se e solo se esistono $n \in \mathbb{N}$ e $f \in End_A(A^n)$ tale che $f^2 = f$ e $M \cong f(A^n)$.

Esercizio 4. Sia $I = (yt^2 + x^3z^2t^3, z^2 + yt^2, x^2t^2) \subset K[x, y, z, t]$ e sia $A = K[x, y, z, t]/I$.

i) I è un ideale monomiale?

ii) Decomporre I come intersezione minimale di ideali primari.

iii) Trovare il nilradicale $\mathcal{N}(A)$ ed esprimerlo come intersezione irridondante di primi.

iv) $\#V(I)$ è finita?