Esercizi di Algebra Commutativa
Moduli 1
Tracce delle soluzioni

1. Sia A un anello $A \neq 0$. Provare che: $A^n \simeq A^m \Rightarrow m = n$.

   Soluzione. Sia $\mathfrak{m} \subset A$ un ideale massimale. Sia $\mathfrak{m}_m = \mathfrak{m}A^m$ e $\mathfrak{m}_n = \mathfrak{m}A^n$. Se $\varphi : A^m \to A^n$ e' isomorfismo di A moduli allora $\varphi_{\mathfrak{m}} : A^m/\mathfrak{m}_m \to A^n/\mathfrak{m}_n$ e'isomorfismo di $A/\mathfrak{m}$ moduli, ossia di spazi vettoriali. Poiche' $m = \dim A^m/\mathfrak{m}_m$ e $\dim A^n/\mathfrak{m}_n = n$ si ha la tesi.

2. Sia M un A-modulo finitamente generato e $\varphi : M \to A^n$ un omomorfismo surgettivo. Provare che $ker(\varphi)$ e' finitamente generato.

   Soluzione. Siano $e_1, .., e_n \in A^n$ una base e siano $m_1, .., m_n \in M$ tali che $\varphi(m_i) = e_i$. Per ogni $m \in M$ si ha che $\varphi(m) = \sum_i a_i e_i = \varphi(\sum_i a_i m_i)$ e quindi $m - \sum_i a_i m_i \in ker(\varphi)$.

   D'altra parte se $m = \sum_i a_i m_i \in ker(\varphi) \cap < m_1, .., m_n >$, si ha che $0 = \varphi(m) = \sum_i a_i e_i$ da cui segue che $a_i = 0$ per ogni i e quindi $m = 0$.

   Cosi' $M = ker(\varphi) \oplus < m_i, .., m_n >$ e poiche' M e' finitamente generato, anche $ker(\varphi)$ e' finitamente generato.

3. Sia A un anello e $I \subset A$ un ideale contenuto nel radicale di Jacobson di A. Siano M un A-modulo, N un A-modulo finitamente generato e $\varphi : M \to N$ un omomorfismo. Provare che se l'omomorfismo indotto $\overline{\varphi} : M/IM \to N/IN$ e' surgettivo allora φ e' surgettivo.

   Soluzione. Si ha che $N = \varphi(M) + IN$ e quindi per Nakayama $N = \varphi(M)$.

4. Provare che $\mathrm{Hom}_A(A, M) \cong M$.

   Soluzione. Ogni omomorfismo $f : A \longrightarrow M$ e' completamente individuato da $f(1)$. Infatti $\forall a \in A, f(a) = af(1)$. Se $\varphi : M \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(A, M)$, dato da $\varphi(m) = f$ tale che $f(1) = m$, φ e' un isomorfismo.

5. Provare che $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q}, \mathbb{Z}) = (0)$ e $Hom_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/(m), \mathbb{Z}/(n)) \cong \mathbb{Z}/(m, n)$.

   Soluzione. Se $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q}, \mathbb{Z})$ allora per ogni primo p si ha $\varphi(1) = \varphi(\frac{p}{p}) = p\varphi(\frac{1}{p})$. Essendo $\varphi(1), \varphi(\frac{1}{p}) \in \mathbb{Z}$ si ha che $\varphi(1)$ e' divisibile per ogni primo p e quindi necessariamente $\varphi(1) = 0$. Allora per ogni $a \in \mathbb{Z}$ si ha che $\varphi(a) = a\varphi(1) = 0$ e quindi anche $b\varphi(\frac{a}{b}) = \varphi(a) = 0$ per ogni $b \neq 0$, da cui segue che φ e' l'omomorfismo nullo.

   Sia $f : Hom_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/(m), \mathbb{Z}/(n))$. Dato che $\mathbb{Z}/(m)$ è ciclico f è determinata dal valore $f(1) = k$ e si deve avere che l'ordine di $f(1)$ deve dividere sia m che n e quindi deve dividere il massimo comun divisore (m, n). Se allora definiamo $L(f) = k \pmod{(m, n)}$, otteniamo un'applicazione $L : Hom_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/(m), \mathbb{Z}/(n)) \longrightarrow \mathbb{Z}/(m, n)$ che è ovviamente lineare e bigettiva.

6. Sia M un A-modulo finitamente generato. Provare che esiste $r \in \mathbb{N}$ ed N sottomodulo di A^r tale che $M \cong A^r/N$.

   Soluzione. Siano $m_1, .., m_r$ generatori di M e consideriamo $\varphi : A^r \longrightarrow M$ data da $\varphi(e_i) = m_i$. φ e' surgettiva e quindi se $N = ker(\varphi)$ si ha $M \cong A^r/N$.

7. Sia $A = k[x, y]$. Presentare $I = (x, y)$ come quoziente di un A-modulo libero.

   Soluzione. Come sopra consideriamo $\varphi : A^2 \to I$ dato da $\varphi(1, 0) = x$ e $\varphi(0, 1) = y$. Questo e' un omomorfismo surgettivo e il suo nucleo e' $N = (y, -x)$. Infatti $\varphi(a, b) = ax + by = 0$ se e solo se $ax = -by$ e quindi $a \in (y)$ e $b \in (x)$. Cosi' $I \cong A^2/N$.

8. Determinare due sistemi minimali di generatori di $\mathbb{Z}$ come $\mathbb{Z}$-modulo.

   Soluzione. $< 1 >$ e $< 2, 3 >$.

9. Sia
$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{\alpha} N \xrightarrow{\beta} P \longrightarrow 0$$
   una successione esatta di A-moduli. Provare che le seguenti tre condizioni sono equivalenti:

   i) esiste un isomorfismo $N \cong M \oplus P$ relativamente al quale $\alpha(m) = (m, 0)$ e $\beta(m, n) = n$.

   ii) esiste un'applicazione $r : N \longrightarrow M$ tale che $r \circ \alpha = id_M$. (tale r si dice una *retrazione di* β).

   iii) esiste un'applicazione $s : P \longrightarrow N$ tale che $\beta \circ s = id_P$. (tale s si dice una *sezione di* β.

   Se una delle condizioni vale si dice che la successione "spezza".

   Soluzione. i) $\Longrightarrow$ ii). Per ogni $n = (m, p) \in N$ basta definire $r(n) = m$.

   i) $\Longrightarrow$ iii). Poiche' β e' surgettiva, per ogni $p \in P$ esiste $n = (m, p) \in N$ tale che $\beta(n) = p$. Definiamo $s(p) = (0, p)$.

   ii) $\Longrightarrow$ i). Scriviamo $n = (n - \alpha(r(n))) + \alpha(r(n))$ e sia L il sottomodulo di N modulo generato da tutti gli elementi della forma $(n - \alpha r(n))$. Si ha che $N = Im(\alpha) \oplus L$. Infatti se $u \in Im(\alpha) \cap L$, da $u = n - \alpha(r(n)) = \alpha(m)$, dato che $r \circ \alpha = id_M$, si ottiene $r(u) = r(n) - r(\alpha(r(n))) = 0 = m$ e quindi poiche' α e' iniettiva $u = 0$. Poiche' $\beta_{|L}$ e' un isomorfismo e $Im(\alpha) \cong M$ la tesi segue.

   iii) $\Longrightarrow$ i). La dimostrazione e' analoga alla precedente. Si consideri $n = (n - s(\beta(n))) + s(\beta(n))$. Poiche' $(n - s(\beta(n))) \in Ker(\beta) = Im(\alpha)$ e $Im(\alpha) \cap Im(s) = (0)$, otteniamo $N = Im(\alpha) \oplus s(P) \cong M \oplus P$.

10. Sia P un $A-$modulo. Provare che le seguenti condizioni sono equivalenti:

    (i) P e'addendo diretto di un A-modulo libero.

(ii) Per ogni $g : M \longrightarrow N$ omomorfismo surgettivo di A-moduli l'omomorfismo indotto $\mathrm{Hom}_A(P, M) \longrightarrow \mathrm{Hom}(P, N)$ e' surgettivo.

(iii) Per ogni $g : M \longrightarrow N$ omomorfismo surgettivo di A-moduli e ogni $h : P \longrightarrow N$ esiste $f : P \longrightarrow M$ tale che $g \circ f = h$.

(iv) Ogni successione esatta $0 \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow P \longrightarrow 0$ spezza.

11. Sia A un dominio di integrita' e sia M un A-modulo. Un elemento $m \in M$ si dice di torsione di M se $Ann(m) \neq 0$. Provare che:

i) $T(M) = \{m \in M \mid Ann(m) \neq 0\}$ e' un sottomodulo di M, (chiamato sottomodulo di torsione di M)

ii) $M/T(M)$ è libero da torsione;

iii) se $f : M \longrightarrow N$ è un omomorfismo, allora $f(T(M)) \subseteq T(N)$;

iv) se $0 \longrightarrow M \xrightarrow{\varphi} N \xrightarrow{\psi} P \longrightarrow 0$ è esatta allora $0 \longrightarrow T(M) \longrightarrow T(N) \longrightarrow T(P)$ è esatta.

Soluzione. i), ii) e iii) sono immediate.

iv) Per semplicita', indichiamo con φ e ψ le restrizioni a $T(M)$ e $T(N)$ degli omomorfismi dati. E' ovvio che $Im(\varphi) \subset Ker(\psi)$. Sia $n \in T(N)$ tale che $\psi(n) = 0$. Allora $\exists m \in M$ tale che $\varphi(m) = n$ e poiche' $\exists a \in A$, $a \neq 0$ tale che $an = a\varphi(m) = \varphi(am) = 0$ quindi dato che φ e' iniettiva $Ann(m) \neq 0$ e $m \in T(M)$.

12. Siano $f : M \longrightarrow N$ e $g : N \longrightarrow M$ omomorfismi di A-moduli tali che $gf = id_M$, allora $N = Imf \oplus Kerg$.

Soluzione Sia $n \in N$ e consideriamo $n = (n - f(g(n)(n - f(g(n)) + f(g(n))$, questa scrittura dimostra la tesi. Infatti $f(g(n)) \in \mathrm{Im}f$ e $n - f(g(n) \in \mathrm{Ker}g$ dato che per ipotesi $g \circ f = \mathrm{id}_M$. Inoltre se $n = f(m) \in \mathrm{Ker}g \cap \mathrm{Im}f$ allora $0 = g(n) = g(f(m)) = m$.

13. Sia

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P \longrightarrow 0$$

una successione esatta di A-moduli. Provare che se M e P sono finitamente generati, allora anche N lo è. Vale il viceversa?

Soluzione. Siano $u_1, ..u_n \in N$ tali che $w_i = g(u_i)$ generano P e siano $v_1, .., v_m \in N$ le immagini di un insieme di generatori di M, e quindi un insieme di generatori di $Im(f)$. Allora $< v_1, .., v_m, u_1, .., u_n >$ generano N. Infatti $\forall n \in N$ si ha che $g(n) = \sum a_i w_i = g(\sum a_i u_i)$ e quindi $n - \sum a_i u_i \in Ker(g) = Im(f)$ da cui si ottiene $n = \sum a_i u_i + \sum b_i v_i$.

Il viceversa non e' vero in generale. Si pensi a $N = k[x_1, x_2, ...]$ l'anello dei polinomi in infinite variabili e $M = (x_1, x_2, ...)$. N e' finitamente generato come $k[x_1, x_2, ...]$ modulo, mentre N non lo e'. Si ha pero' la successione esatta

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow k \longrightarrow 0$$

.

14. Siano M e N sottomoduli di un A-modulo L. Provare che c'è una successione esatta

$$0 \longrightarrow M \cap N \xrightarrow{f} M \oplus N \xrightarrow{g} M + N \longrightarrow 0$$

Dedurre che se $M + N$ e $M \cap N$ sono finitamente generati, allora M e N sono finitamente generati.

Soluzione. Sia $g(m, n) = m - n$. Si ha che $ker(g) = \{(m, m) \mid m \in M \cap N\}$. Allora se $f(m) = (m, m)$, la successione e' esatta e la tesi segue dall'esercizio precedente.

15. Provare che la successione

$$M' \xrightarrow{u} M \xrightarrow{v} M'' \longrightarrow 0$$

è esatta se e soltanto se per ogni A-modulo N la successione

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}(M'', N) \xrightarrow{\overline{v}} \mathrm{Hom}(M, N) \xrightarrow{\overline{u}} \mathrm{Hom}(M', N)$$

è esatta.

Soluzione. $\Longrightarrow$ $\overline{v}$ e' iniettiva, infatti da $\overline{v}(f) = f \circ v = 0$ segue che $Im(v) = M'' \subseteq Kerf$. Da $v \circ u = 0$ segue immediatamente che $Im(\overline{v}) \subseteq Ker(\overline{u})$. Sia allora $g \in Ker(\overline{u})$ e proviamo che esiste $f \in \mathrm{Hom}(M'', N)$ tale che $g = \overline{v}(f)$. Per la surgettivita' di v per ogni $m'' \in M''$ esiste $m \in M$ tale che $v(m) = m''$. Proviamo che possiamo definire $f(m'') = g(m)$. Sia m_1 tale che $v(m_1) = m''$ se $g(m) = g(m'')$, f e' ben definita ed e' ovviamente un omomorfismo. Dato che $v(m - m_1) = 0$ esiste $m' \in m'$ tale che $u(n) = m - m_1$, ma allora $0 = g(u(n)) = g(m) - g(m_1)$.

$\Longleftarrow$ Supponiamo per assurdo che v non sia surgettiva. Allora l'omomorfismo canonico $g : M'' \longrightarrow M''/Im(v)$ non e' l'omomorfismo nullo. Posto $N = M''/Im(v)$ si avrebbe $\overline{v}(g) = g \circ v = 0$ contro l'ipotesi che $\overline{v}$ sia iniettivo.

Proviamo ora che $Im(u) = Ker(v)$, provando le due inclusioni. $Im(u) \subseteq Ker(v)$, infatti se prendiamo $N = M''$, dato che $\overline{u} \circ \overline{v} = 0$ otteniamo $(\overline{u} \circ \overline{v})(id_{M''}) = v \circ u = 0$.

Proviamo infine l'inclusione inversa; consideriamo $N = M/Im(u)$ e l'omomorfismo canonico $\pi : M \longrightarrow M/Im(u)$. Si ha $Ker(\pi) = Im(u)$ e dato che $\overline{u}(\pi) = 0$ esiste $f \in \mathrm{Hom}(M'', N)$ tale che $\overline{v}(f) = \pi$. Quindi $Ker(v) \subseteq Ker(\pi) = Im(u)$.

16. Sia M un A-modulo finitamente generato e sia $f : M \longrightarrow M$ un omomorfismo di A-moduli. Provare che se f è surgettivo, allora f è un isomorfismo.

Soluzione. Consideriamo M come $A[x]$ modulo definendo $p(x)m = (\sum a_i x^i)m = \sum a_i f^i(m)$. Dato che f e' surgettivo si ha che $(x)M = M$ e quindi esiste $p(x) = 1 + xq(x) \equiv 1 \pmod{x}$ tale che $p(x)M = 0$. Sia $m \in Ker(f)$, allora $m = (p(x) - xq(x))m = p(x)m - q(x)f(m) = 0$, ossia $Ker(f) = 0$ e f e' iniettivo.

17. Sia M un A-modulo finitamente generato, sia N un sottomodulo di M non nullo. Allora non esiste un isomorfismo di M in M/N.

    Soluzione. Se esistesse un isomorfismo $\varphi : M/N \longrightarrow M$ si avrebbe anche che $\varphi \circ \pi : M \longrightarrow M/N \longrightarrow M$ e' surgettivo e quindi iniettivo, contro l'ipotesi che N e' non nullo.

18. Sia M un A-modulo finitamente generato, I un ideale di A. Provare che $(IM : M) \subseteq \sqrt{I + (0 : M)}$. Dedurre che vale

    $$\sqrt{0 : M/IM} = \sqrt{I + (0 : M)}$$

    Soluzione. Sia $a \in (IM : M)$, allora se consideriamo $\varphi_a : M \longrightarrow M$ data da $\varphi_a(m) = am$ si ha che $\varphi_a(M) \subset IM$, quindi per il teorema di Hamilton Cayley, eistono $b_i \in I$ tali che ${\varphi_a}^n = \sum b_i {\varphi_a}^i = 0$.

    Per ogni $m \in M$ vale quindi $(\varphi^n + \sum b_i \varphi^i)(m) + (a^n + \sum b_i a^i)m = 0$, cioe' $a^n + \sum b_i a^i = a^n + b \in (0 : M)$, con $b \in I$, da cui segue che $(IM : M) \subseteq \sqrt{I + (0 : M)}$.

    Si ha anche che $(I + (0 : M)) \subset (IM : M)$, infatti se $b + c \in (I + (0 : M))$, per ogni $m \in M$, $(b + c)m = bm + cm = bm \in IM$.

    Considerando i radicali si ottiene quindi $\sqrt{IM : M} = \sqrt{I + (0 : M)}$.

    Poiche' $\sqrt{(IM : M)} = \sqrt{(0 : M/IM)}$, la tesi segue.

19. Siano x e y elementi non invertibili di A. Se $x + y = 1$, allora $\{1\}$ e $\{x, y\}$ sono basi minimali di A (come A-modulo).

    Soluzione. Poiche' per ogni $a \in A$ si ha che $a = a(x + y) = ax + ay$, $\{x, y\}$ genera A come A-modulo. Se non fosse un insieme di generatori minimale si avrebbe ad esmpio $x = ay$ da cui $x + y = (1 + a)y = 1$ contro l'ipotesi che y e' non invertibile.

20. Se N è un sottomodulo di M, provare che

    $$0 : (M/N) = N : M.$$

    Soluzione. Se $a \in (N : M)$ allora $am \in N$ for all $m \in M$, questo equivale a dire che $a\overline{m} \equiv 0 \pmod{N}$.