Algebra II - Moduli I

1. Sia A un anello $A \neq 0$. Provare che: $A^n \simeq A^m \Rightarrow m = n$.

2. Sia M un A-modulo finitamente generato e $\varphi : M \to A^n$ un omomorfismo surgettivo. Provare che $ker(\varphi)$ e' finitamente generato.

3. Sia A un anello e $I \subset A$ un ideale contenuto nel radicale di Jacobson di A. Siano M un A-modulo, N un A-modulo finitamente generato e $\varphi : M \to N$ un omomorfismo.Provare che se l'omomorfismo indotto $\bar{\varphi} : M/IM \to N/IN$ e' surgettivo allora φ e' surgettivo.

4. Provare che $\mathrm{Hom}_A(A, M) \cong M$.

5. Provare che $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q}, \mathbb{Z}) = (0)$ e $Hom_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/(m), \mathbb{Z}/(n)) \cong \mathbb{Z}/(m, n)$

6. Sia M un A-modulo finitamente generato. Provare che esiste $r \in \mathbb{N}$ ed N sottomodulo di A^r tale che $M \cong A^r/N$.

7. Sia $A = k[x, y]$. Presentare $I = (x, y)$ come quoziente di un A-modulo libero.

8. Determinare due sistemi minimali di generatori di $\mathbb{Z}$ come $\mathbb{Z}$-modulo.

9. Sia
$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{\alpha} N \xrightarrow{\beta} P \longrightarrow 0$$
una successione esatta di A-moduli. Provare che le seguenti tre condizioni sono equivalenti:

   i) esiste un isomorfismo $N \cong M \oplus P$ relativamente al quale $\alpha(m) = (m, 0)$ e $\beta(m, n) = n$.
   ii) esiste un'applicazione $r : N \longrightarrow M$ tale che $r \circ \alpha = id_M$. (tale r si dice una *retrazione di* β).
   iii) esiste un'applicazione $s : P \longrightarrow N$ tale che $\beta \circ s = id_P$. (tale s si dice una *sezione di* β.

   Se una delle condizioni vale si dice che la successione *"spezza"*

10. Sia P un $A-$modulo. Provare che le seguenti condizioni sono equivalenti:

   (i) P e'addendo diretto di un A-modulo libero.
   (ii) Per ogni $g : M \longrightarrow N$ omomorfismo surgettivo di A-moduli l'omomorfismo indotto $\mathrm{Hom}_A(P, M) \longrightarrow \mathrm{Hom}(P, N)$ e' surgettivo.
   (iii) Per ogni $g : M \longrightarrow N$ omomorfismo surgettivo di A-moduli e ogni $h : P \longrightarrow N$ esiste $f : P \longrightarrow M$ tale che $g \circ f = h$.
   (iv) Ogni successione esatta $0 \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow P \longrightarrow 0$ spezza.

11. Sia A un dominio di integrita' e sia M un A-modulo. Un elemento $m \in M$ si dice di torsione di M se $Ann(m) \neq 0$. Provare che:

- $T(M) = \{m \in M \mid Ann(m) \neq 0\}$ e' un sottomodulo di M, (chiamato sottomodulo di torsione di M)
- $M/T(M)$ è libero da torsione;
- se $f : M \longrightarrow N$ è un omomorfismo, allora $f(T(M)) \subseteq T(N)$;
- se $0 \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow P$ è una successione esatta allora $0 \longrightarrow T(M) \longrightarrow T(N) \longrightarrow T(P)$ è esatta.

12. Siano $f : M \longrightarrow N$ e $g : N \longrightarrow M$ omomorfismi di A-moduli tali che $gf = id_M$, allora $N = Imf \oplus Kerg$.

13. Sia
$$0 \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow P \longrightarrow 0$$
una successione esatta di A-moduli. Provare che se M e P sono finitamente generati, allora anche N lo è. Vale il viceversa?

14. Siano M e N sottomoduli di un A-modulo L. Provare che c'è una successione esatta
$$0 \longrightarrow M \cap N \longrightarrow M \oplus N \longrightarrow M + N \longrightarrow 0$$
Dedurre che se $M + N$ e $M \cap N$ sono finitamente generati, allora M e N sono finitamente generati.

15. Provare che la successione
$$M' \xrightarrow{u} M \xrightarrow{v} M'' \longrightarrow 0$$
è esatta se e soltanto se per ogni A-modulo N la successione
$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}(M'', N) \xrightarrow{\overline{v}} \mathrm{Hom}(M, N) \xrightarrow{\overline{u}} \mathrm{Hom}(M', N)$$
è esatta.

16. Sia M un A-modulo finitamente generato e sia $f : M \longrightarrow M$ un omomorfismo di A-moduli. Provare che se f è surgettivo, allora f è un isomorfismo.

17. Sia M un A-modulo finitamente generato, sia N un sottomodulo di M non nullo. Allora non esiste un isomorfismo di M in M/N.

18. Sia M un A-modulo finitamente generato, I un ideale di A. Provare che $IM : M \subseteq \sqrt{I + (0 : M)}$. Dedurre che vale
$$\sqrt{0 : M/IM} = \sqrt{I + 0 : M}$$

19. Provare che $0 : (M + N) = (0 : M) \cap (0 : N)$.