A.A. 2014/2015
Corso di Analisi Matematica 1

Stampato integrale delle lezioni

(Volume 2)

Massimo Gobbino

Indice

ANALISI 1 — LEZIONE 052

Titolo nota 25/11/2014

$\boxed{\text{INTEGRALI}}$ (di RIEMANN) (integrali propri)

→ notazioni
→ significato geometrico
→ definizione
→ Tecniche di calcolo

① Notazioni

$$\int_a^b \boxed{f(x)}\, dx$$

oggetto misterioso

somma modificata

integranda

simbolo di integrale: S modificata

Ingredienti fond.:

→ zona di integrazione: intervallo $[a,b]$, quindi limitata
→ funzione integranda: $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ limitata
$\exists\, M \in \mathbb{R}$ t.c. $|f(x)| \leq M \quad \forall x \in [a,b]$.

Def. estesa

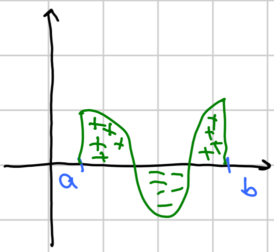
$$\int_a^a f(x)\,dx = 0 \qquad \text{(stesso estremo)}$$

$$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx \qquad \text{(estremi rovesciati)}$$

② Significato geometrico

$$\int_a^b f(x)\,dx = \text{area } \boxed{\text{CON SEGNO}}$$

della parte di piano compresa tra asse x e grafico di $f(x)$.

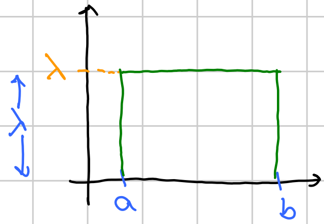


Le zone sopra l'asse x contano con il segno $+$, le zone sotto contano con il segno $-$.

Integrale $= 0 \iff$ area sopra $=$ area sotto.

③ **Definizione** 3 tappe → caso banale
→ caso semibanale
→ caso generale

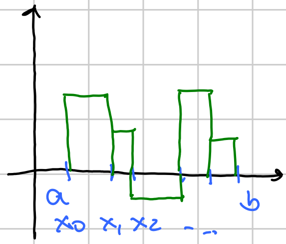
Caso banale : $f(x) = \lambda$ (costante) per ogni $x \in [a,b]$



In questo caso si pone

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lambda(b-a)$$

= area con segno del rettangolo.



Caso semibanale : $f(x)$ è costante a tratti, cioè esiste un intero $n \geq 1$ ed esistono numeri reali

$$\boxed{a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b}$$

partizione di $[a,b]$
(i pezzi possono avere lungh. diverse)

ed esistono numeri reali $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ tali che

$$f(x) = \lambda_i \qquad \forall x \in (x_{i-1}, x_i)$$

(negli estremi si può decidere a piacere o anche astenersi)

In questo caso si pone

$$\int_a^b f(x)\,dx = \text{somma con segno delle aree dei rettangoli}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\lambda_i}_{\text{altezza rettangolo } i\text{-esimo}} \underbrace{(x_i - x_{i-1})}_{\text{base rettangolo } i\text{-esimo}}$$

Le funzioni del caso semibanale si chiamano
→ FUNZIONI SEMPLICI
→ FUNZIONI A GRADINO (STEP FUNCTIONS)

Oss. 1 Le step functions sono combinazioni lineari di funzioni caratteristiche di intervalli (cioè quelle che valgono 1 sull'intervallo e 0 altrove)

Oss. 2 Non è evidente che due combinazioni lineari diverse che produco la stessa funzione abbiano lo stesso integrale applicando la formula del semibanale.

Oss. 3 Non è nemmeno evidente che, date due step functions $\varphi_1(x)$ e $\varphi_2(x)$ con

$$\varphi_1(x) \geq \varphi_2(x) \qquad \forall x \in [a,b]$$

allora per forza

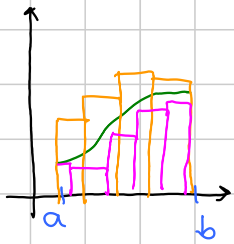
$$\int_a^b \varphi_1(x)\,dx \geq \int_a^b \varphi_2(x)\,dx$$

Caso generale $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ è una funzione limitata qualunque.

In questo caso si definiscono l'integrale superiore

$$I^+(f,[a,b]) =$$

$$= \inf \left\{ \int_a^b \varphi(x)\,dx : \varphi \text{ è una step function e } \varphi(x) \geq f(x)\ \forall x \in [a,b] \right\}$$



Analogamente l'integrale inferiore è

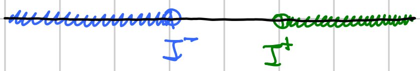
$$I^-(f,[a,b]) = \sup \left\{ \int_a^b \varphi(x)\,dx : \varphi \text{ è una step function e } \varphi(x) \leq f(x)\ \forall x \in [a,b] \right\}$$

Oss. 4 La limitatezza di $f(x)$ garantisce l'esistenza di step functions sopra e sotto, quindi faccio inf/sup di insiemi non vuoti.

Teorema Per ogni funzione $f(x)$ limitata si ha la relazione

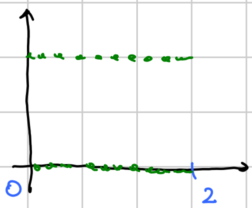
$$I^-(f,[a,b]) \leq I^+(f,[a,b])$$

L'idea è che ogni somma di Riemann inferiore (quelle che ci sono nella def. di I^-) è $\leq$ di ogni somma di Riemann superiore. Questo segue dall'oss. 3 precedente



Esempio (funzione di DIRICHLET) $[a,b]=[0,2]$

$$f(x)=\begin{cases} 1 & \text{se } x\in\mathbb{Q} \\ 0 & \text{se } x\notin\mathbb{Q} \end{cases}$$



Ogni step function $\varphi(x)\geq f(x)$ è in realtà ≥ 1, quindi $I^+(f,[0,2])=2$
Ogni step function $\varphi(x)\leq f(x)$ è in realtà ≤ 0, quindi $I^-(f,[0,2])=0$.

Def. Una funzione limitata si dice integrabile <u>secondo RIEMANN</u> in $[a,b]$ se

$$\boxed{I^-(f,[a,b]) = I^+(f,[a,b])}$$

In tal caso il valore comune di I^+ e I^- si dice integrale di f in $[a,b]$ e si indica con

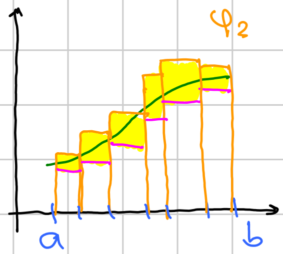
$$\int_a^b f(x)\,dx\,,$$

Approccio alternativo Si definisce l'integrale su tutto $\mathbb{R}$ per funzioni $f(x)$ che sono limitate e nulle al di fuori di un certo intervallo $[a,b]$. Si procede allo stesso modo imponendo che anche le step functions nella def. di I^+ e I^- siano nulle fuori da un intervallo (non necessariamente comune).

Criterio di integrabilità Una funzione $f(x)$ è integrabile in $[a,b]$ se e solo se, per ogni $\varepsilon > 0$, esistono due step functions $\varphi_1(x)$ e $\varphi_2(x)$, definite a partire dalla stessa suddivisione di $[a,b]$ tali che

$$\varphi_1(x) \leq f(x) \leq \varphi_2(x) \qquad \forall x \in [a,b]$$

$$\underbrace{\int_a^b \varphi_2(x)\,dx - \int_a^b \varphi_1(x)\,dx}_{\text{Area gialla in figura}} \leq \varepsilon$$



$\boxed{\text{Dim}}$ OVVIA!

— o — o —

ANALISI 1 — LEZIONE 053

Titolo nota 25/11/2014

Teoremi sulle funzioni integrabili

① Siano $f(x)$ e $g(x)$ due funzioni integrabili in $[a,b]$.
Allora $f(x)+g(x)$ è integrabile in $[a,b]$ e

$$\int_a^b [f(x)+g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

$\boxed{\text{Dim.}}$ Uso il criterio di integrabilità con $\frac{\varepsilon}{2}$ per $f(x)$ e $g(x)$.
Allora esistono step functions

$$\varphi_1^f(x) \leq f(x) \leq \varphi_2^f(x) \qquad \varphi_1^g(x) \leq g(x) \leq \varphi_2^g(x)$$

tali che
$$\int_a^b \varphi_2^f(x)\,dx - \int_a^b \varphi_1^f(x)\,dx \leq \frac{\varepsilon}{2}$$
$$\int_a^b \varphi_2^g(x)\,dx - \int_a^b \varphi_1^g(x)\,dx \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

Wlog posso assumere che tutte siano definite a partire dalla stessa suddivisione. Allora si verifica che

$$\underbrace{\varphi_1^f(x)+\varphi_1^g(x)}_{\varphi_1(x)} \leq f(x)+g(x) \leq \underbrace{\varphi_2^f(x)+\varphi_2^g(x)}_{\varphi_2(x)} \qquad \forall x\in[a,b]$$

e inoltre

$$\int_a^b \varphi_2(x)\,dx - \int_a^b \varphi_1(x)\,dx \leq \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$
$$\overset{\text{"}}{\;} \int_a^b \varphi_2^f(x)\,dx + \int_a^b \varphi_2^g(x)\,dx - \int_a^b \varphi_1^f(x)\,dx - \int_a^b \varphi_1^g(x)\,dx$$

Ho usato che l'integrale della somma è uguale alla somma degli integrali per le step functions (andrebbe dimostrato).

② Sia $f(x)$ integrabile in $[a,b]$ e sia $\lambda \in \mathbb{R}$.
Allora $\lambda f(x)$ è integrabile in $[a,b]$ e

$$\int_a^b \lambda f(x)\,dx = \lambda \int_a^b f(x)\,dx$$

Dim. Praticamente come sopra (occhio che se $\lambda < 0$ si scambiano le disuguaglianze).

①+② in versione colta: L'insieme delle funzioni integrabili secondo Riemann in $[a,b]$ è uno spazio vettoriale e

$$f \longrightarrow \int_a^b f(x)\,dx$$

è una appl. lin. da questo sp. vett. in $\mathbb{R}$.

Achtung!
$$\int_a^b f(x)\cdot g(x)\,dx \neq \int_a^b f(x)\,dx \cdot \int_a^b g(x)\,dx$$

in generale

(domanda: se vale l'=, cosa posso dire di $f(x)$ e $g(x)$?

③ Monotonia dell'integrale: Se $f(x)$ e $g(x)$ sono integrabili e

$$f(x) \leq g(x) \qquad \forall\, x \in [a,b]$$

allora
$$\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$$

Dim. Per esempio le somme superiori per $g(x)$ sono anche somme superiori per $f(x)$

Domanda: cosa resta vero di ①, ②, ③ se non si assume che le funzioni siano integrabili?

④ <u>Integrali e valori assoluti</u> Sia $f(x)$ integrabile in $[a,b]$.
Allora $|f(x)|$ è integrabile in $[a,b]$ e

$$\boxed{\left| \int_a^b f(x)\,dx \right| \le \int_a^b |f(x)|\,dx}$$

valore assoluto dell'int. è $\le$ dell'int. del valore assoluto

<u>Oss.</u> Se so che $|f(x)|$ è integrabile, posso dedurre che $f(x)$ è integrabile? NO!

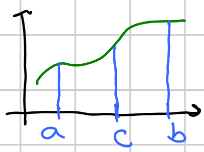
$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ -1 & \text{se } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

<u>Oss.</u> Il ④ è analogo alla proprietà $|a_1 + \dots + a_n| \le |a_1| + \dots + |a_n|$

— o — o —

⑤ <u>Additività rispetto alla zona di integrazione</u>
Sia $f(x)$ integrabile in $[a,b]$ e sia $c \in (a,b)$.
Allora $f(x)$ è integrabile in $[a,c]$ e in $[c,b]$ e

$$\boxed{\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx}$$



Vale anche il viceversa: se $f(x)$ è int. in $[a,c]$ e $[c,b]$, allora è integrabile in $[a,b]$ e vale la formula

"<u>Dim</u>": si tratta di lavorare con le step functions aggiungendo sempre il p.to c.

<u>Alternativa</u>: usare la definizione di integrale su tutto per funzioni nulle fuori da un intervallo, poi introdurre

$$f_1(x) = \begin{cases} f(x) & x \in (a,c) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \qquad f_2(x) = \begin{cases} f(x) & x \in (c,b) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

e usare il teo. della somma.

— o — o —

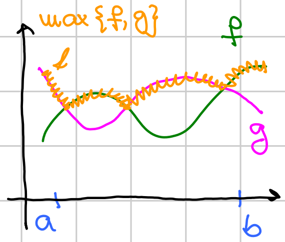
Oss. In realtà andrebbe dimostrato che l'integrale definito nel caso generale coincide per le step functions con quello definito nel caso semibanale.

⑥ Reticolo delle funzioni integrabili

Se $f(x)$ e $g(x)$ sono integrabili in $[a,b]$, allora anche

$$\max\{f(x), g(x)\} \quad e \quad \min\{f(x), g(x)\}$$

sono integrabili in $[a,b]$.



$\boxed{\text{Dim.}}$ Formula generale a livello di numeri

$$\max\{A,B\} = \frac{A+B+|A-B|}{2} \qquad \text{se } A \geq B \quad \frac{A+\cancel{B}+A-\cancel{B}}{2} = A$$

$$\qquad \text{se } A \leq B \quad \frac{\cancel{A}+B+B-\cancel{A}}{2} = B$$

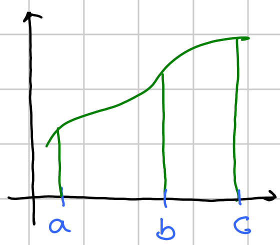
$$\min\{A,B\} = \frac{A+B-|A-B|}{2}$$

Se $f(x)$ e $g(x)$ sono integrabili, allora $f(x)-g(x)$ è integrabile, ma allora $|f(x)-g(x)|$ è integrabile e quindi anche max e min sono somma / diff. di funzioni integrabili.

Oss. La proprietà ⑤ vale anche se $c \notin (a,b)$ pur di interpretare gli integrali

$$\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$$

$$\text{“}-\int_b^c f(x)\,dx\text{”}$$



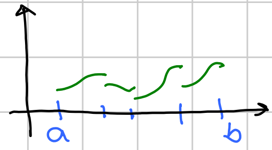
Ovviamente devo assumere come ipotesi che $f(x)$ sia integrabile su tutto $[a,c]$.

Teorema misterioso Le seguenti classi di funzioni sono integrabili

→ le funzioni continue

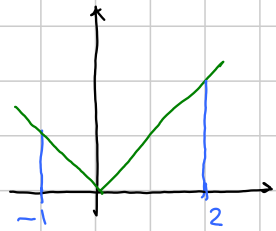
→ le funzioni monotone

→ le funzioni continue a tratti



Esempio 1 $\displaystyle\int_{-1}^{2} |x|\,dx$ lo vedo come area

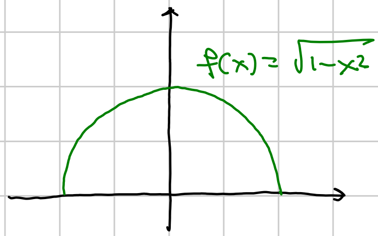
$= \frac{5}{2}$ (somma aree triangoli)



Esempio 2 $\displaystyle\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}$

$y = \sqrt{1-x^2}$

metà dell'area del cerchio



ANALISI 1 — LEZIONE 054

Titolo nota 27/11/2014

Come si calcolano gli integrali

Procedura: devo calcolare $\int_a^b f(x)\,dx$ con $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continua.
Cerco una funzione $F:[a,b]\to\mathbb{R}$ che sia continua in $[a,b]$ e derivabile almeno in (a,b) con

$$F'(x) = f(x) \qquad \forall\, x\in(a,b)$$

Allora
$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = F(b)-F(a)}$$

Notazione
$$F(b)-F(a) = [F(x)]_a^b = [F(x)]_{x=a}^{x=b}$$

Def. Sia $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ una funzione continua.
Si dice primitiva di f una qualunque funzione $F:[a,b]\to\mathbb{R}$ tale che

- F è continua in $[a,b]$
- F è derivabile in (a,b) (almeno)
- $F'(x)=f(x)$ per ogni $x\in(a,b)$.

(In inglese: primitiva = ANTIDERIVATIVE)

Lemma 1 Siano F_1 ed F_2 due primitive di $f(x)$ in $[a,b]$.
Allora la funzione $F_2(x)-F_1(x)$ è costante in $[a,b]$, cioè esiste $c\in\mathbb{R}$ tale che

$$F_2(x) = F_1(x)+c \qquad \forall\, x\in[a,b]$$

Dim. Pongo $G(x) := F_2(x)-F_1(x)$. Allora

- G è continua in $[a,b]$
- G è derivabile in (a,b)

- $G'(x) = F_2'(x) - F_1'(x) = f(x) - f(x) = 0$ per ogni $x \in (a,b)$

Posso applicare Lagrange a $G(x)$ e ottengo che per ogni $x \in (a,b]$ esiste $c \in (a,x)$ t.c.

$$G(x) - G(a) = \underset{\substack{\| \\ 0}}{G'(c)}(x-a) = 0$$

Quindi $G(x) = G(a)$ per ogni $x \in [a,b] \Rightarrow G(x)$ è costante.

— o — o —

Conseguenza Se F_1 ed F_2 sono 2 primitive di $f(x)$, allora

$$[F_1(x)]_a^b = [F_2(x)]_a^b$$

Dim. Per il Lemma esiste $c \in \mathbb{R}$ t.c. $F_2(x) = F_1(x) + c$ ...

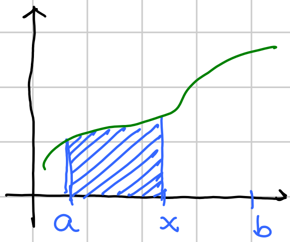
$$[F_2(x)]_a^b = F_1(b) + \cancel{c} - F_1(a) - \cancel{c} = [F_1(x)]_a^b.$$

— o — o —

Def. Sia $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione integrabile.
Si dice funzione integrale la funzione

$$\boxed{F(x) = \int_a^x f(t)\,dt} \quad \forall x \in [a,b]$$

variabile "muta"



Sotto alla definizione bisogna verificare che se f è integrabile in $[a,b]$, allora f è integrabile in $[a,x]$ per ogni $x \in [a,b]$.

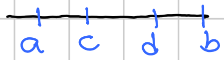
Proprietà ovvia della funzione integrale

Per ogni intervallo $[c,d] \subseteq [a,b]$ vale la relazione

$$\boxed{\int_c^d f(x)\,dx = F(d) - F(c) = [F(x)]_c^d}$$

$\boxed{\text{Dim.}}$ Per l'additività dell'integrale rispetto alla zona di integrazione si ha che

$$\underbrace{\int_a^d f(x)\,dx}_{= F(d)} = \underbrace{\int_a^c f(x)\,dx}_{= F(c)} + \int_c^d f(x)\,dx$$



Sottraendo ho la tesi.

— o — o —

$\boxed{\text{Teorema}}$ (Teorema fondamentale del calcolo integrale)

Se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ è continua, allora la funzione integrale è una primitiva di f.

$\boxed{\text{Teorema}}$ (Teorema della media integrale)
(Mean value thm. for integrals)

Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua.
Allora esiste almeno un p.to $c \in [a,b]$ (addirittura $c \in (a,b)$) tale che

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a)}$$

A POSTERIORI questo è un Lagrange per la funzione integrale.

$\boxed{\text{Dim.}}$ Essendo f continua, per W f ha min m e max M in $[a,b]$. Allora è facile vedere che

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a)$$

(confronto con rettangolo sopra e sotto)

e quindi
$$m \leq \underbrace{\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx}_{\lambda} \leq M$$

Poiché $m \leq \lambda \leq M$, per il teorema di esistenza dei valori intermedi esiste $c \in [a,b]$ tale che $f(c) = \lambda$, il che è equivalente alla tesi. $\square$

— o — o —

$\boxed{\text{Dim. teo. fondamentale}}$ Sia $F(x) := \int_a^x f(t)\,dt$ la funzione integrale. Sia $x_0 \in (a,b)$.

Voglio dim. che $F'(x_0)$ esiste e vale $f(x_0)$.

Faccio il rapporto incrementale, iniziando con il caso $h > 0$

$$\frac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h} = \frac{1}{\underset{\uparrow}{h}} \int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,dt$$

lungh. intervallo di integrazione

$$= f(c(h)) \quad \text{per un opportuno } c(h) \in [x_0, x_0+h]$$

Posso concludere in 2 modi equivalenti

- 1° modo: quando $h \to 0^+$, ho che $c(h) \to x_0^+$ (carabinieri) quindi

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h} = \lim_{h \to 0} f(c(h)) = \lim_{y \to x_0^+} f(y) = f(x_0)$$

$y = c(h)$ $\qquad$ f continua in x_0

- 2° modo: per ogni $\varepsilon > 0$ $\exists\, \delta > 0$ t.c. $|f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon$ per ogni $x \in (x_0, x_0+\delta]$ quindi non appena $h \leq \delta$ si ha che

$$\left| \frac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h} - f(x_0) \right| = \left| f(c(h)) - f(x_0) \right| \leq \varepsilon.$$

Facciamo ora il caso con $h < 0$

$$\frac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h} = \frac{1}{h}\left(-\int_{x_0+h}^{x_0} f(t)\,dt \right)$$

$$= \frac{1}{\underset{\uparrow}{-h}} \int_{x_0+h}^{x_0} f(t)\,dt = f(c(h))$$

ampiezza intervallo

e la conclusione segue come sopra.

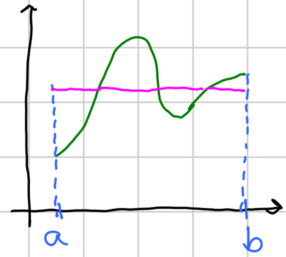
—o —o —

Oss 1 Nel teorema della media integrale il valore

$$\lambda = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

rappresenta "il valor medio di $f(x)$ in $[a,b]$", cioè il valore che dovrebbe avere una funzione costante per avere lo stesso integrale di f in $[a,b]$

le aree sopra λ e sotto λ si devono compensare



Oss. 2 Cosa posso dire sempre della funzione integrale anche quando $f(x)$ non è continua?

Posto $M := \sup\{|f(x)| : x \in [a,b]\}$ si ha che $F(x)$ è lipschitziana con costante M, cioè

$$|F(x) - F(y)| \le M\,|x-y| \qquad \forall x \in [a,b]\ \forall y \in [a,b]$$

Dim. wlog $x \ge y$. Allora

$$|F(x) - F(y)| = \left|\int_y^x f(t)\,dt\right| \le \int_y^x |f(t)|\,dt$$

$$\le \int_y^x M\,dt = M(x-y)$$

$$= M|x-y|.$$

— o — o —

ANALISI 1 — LEZIONE 055

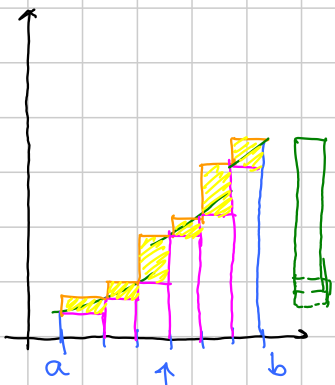
Titolo nota 27/11/2014

<u>Teorema</u> Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ monotona.
Allora f è integrabile in $[a,b]$.

$\boxed{\text{Dim.}}$ Wlog suppongo f debolmente crescente.
Cosa devo fare? Devo, per ogni $\varepsilon > 0$, trovare due funzioni a gradino $\varphi_1(x)$ e $\varphi_2(x)$ tali che

$$\varphi_1(x) \le f(x) \le \varphi_2(x) \qquad \forall x \in [a,b] \quad (*)$$

$$\int_a^b \varphi_2(x)\,dx - \int_a^b \varphi_1(x)\,dx \le \varepsilon$$



tutti i rettangoli gialli hanno stessa base e posso impilarli

Suddivido $[a,b]$ in n parti uguali mediante p.ti

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b \qquad x_i - x_{i-1} = \frac{b-a}{n}$$

In ogni intervallino (x_{i-1}, x_i) (con $i = 1, \ldots, n$) pongo

$$\varphi_1(x) = f(x_{i-1}) \qquad \varphi_2(x) = f(x_i)$$

Grazie alla monotonia ho gratis la $(*)$. Ora

$$\begin{aligned}
\int_a^b \varphi_2(x)\,dx - \int_a^b \varphi_1(x)\,dx &= \int_a^b (\varphi_2(x) - \varphi_1(x))\,dx \\
&= \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1})(f(x_i) - f(x_{i-1})) \\
&= \frac{b-a}{n} \underbrace{\sum_{i=1}^n (f(x_i) - f(x_{i-1}))}_{\text{telescopica}} \\
&= \frac{b-a}{n} (f(b) - f(a))
\end{aligned}$$

Prendendo n abbastanza grande, la differenza diventa $\leq \varepsilon$. □

<u>Teorema</u> Sia f integrabile in $[a,b]$.
Allora $|f|$ è integrabile in $[a,b]$ e

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$$

$\boxed{\text{Dim.}}$ Supponiamo di sapere già che $|f(x)|$ è integrabile. Allora da

$$-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)| \qquad \forall x \in [a,b]$$

segue per la monotonia dell'integrale che

$$-\int_a^b |f(x)|\,dx \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$$

il che è equivalente alla disuguaglianza

(Ricorso: $\quad -B \leq A \leq B \iff |A| \leq B$)

Resta da dimostrare che $|f(x)|$ è integrabile, sapendo che $f(x)$ lo è.
Ipotesi: per ogni $\varepsilon > 0$ esistono $\varphi_1(x)$ e $\varphi_2(x)$ a gradino t.c.

$$\varphi_1(x) \leq f(x) \leq \varphi_2(x)$$

$$\int_a^b [\varphi_2(x) - \varphi_1(x)]\,dx \leq \varepsilon$$

Tesi: per ogni $\varepsilon > 0$ esistono $\psi_1(x)$ e $\psi_2(x)$ a gradino t.c.

$$\psi_1(x) \leq |f(x)| \leq \psi_2(x)$$

$$\int_a^b [\psi_2(x) - \psi_1(x)]\,dx \leq \varepsilon$$

Problema: trovare ψ_1 e ψ_2 a partire da φ_1 e φ_2.

Considero gli intervallini della suddivisione per $\varphi_1(x)$ e $\varphi_2(x)$

- se in un intervallino $\varphi_1(x)$ e $\varphi_2(x)$ sono ≥ 0, allora nello stesso intervallino $f(x) \geq 0$ quindi posso usare

$$\psi_1 = \varphi_1 \qquad \text{e} \qquad \psi_2 = \varphi_2$$

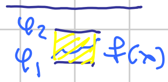
così nell'intervallino $\psi_1 \leq |f| \leq \psi_2$ e $\int \psi_2 - \psi_1 = \int \varphi_2 - \varphi_1$

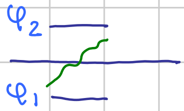
- se in un intervallino φ_1 e φ_2 sono ≤ 0, allora posso porre

$$\psi_1 = -\varphi_2 \qquad \text{e} \qquad \psi_2 = -\varphi_1$$

così vale la disuguaglianza e

$$\int \psi_2 - \psi_1 = \int \varphi_2 - \varphi_1$$





- se in un intervallino $\varphi_1 < 0$ e $\varphi_2 > 0$ allora nello stesso intervallo ho

$$\underset{\psi_1}{\overset{\shortparallel}{0}} \leq |f(x)| \leq \underbrace{\max\{\varphi_2, -\varphi_1\}}_{\psi_2}$$

e

$$\int \psi_2 - \psi_1 = \int \max\{\varphi_2, -\varphi_1\} \leq \int \varphi_2 - \varphi_1$$

Sommando su tutti gli intervallini si ottiene la tesi

— o — o —

$\boxed{\text{Discorso del } +c}$ Prendiamo $f(x) = x^2$.

Una primitiva è $\frac{1}{3}x^3 = F(x)$. Basta derivare per verificare

L'insieme di tutte le primitive di x^2 è $\{\frac{1}{3}x^3 + c : c \in \mathbb{R}\}$

Per il calcolo operativo di $\int_a^b x^2 dx$ il $+c$ non serve a nulla.

Prendiamo ora $f(x) = \frac{1}{x}$. Una primitiva è $F(x) = \log x$, o per lo meno lo è per ogni $x > 0$

$$F'(x) = f(x) \qquad \forall x > 0$$

Ancora meglio: $F(x) = \log|x|$ è una primitiva di $f(x) = \frac{1}{x}$ per ogni $x \neq 0$.

Infatti

- per $x > 0$ è ovvio
- per $x < 0$ si ha $F(x) = \log(-x)$, quindi

$$F'(x) = [\log(-x)]' = \frac{1}{-x}(-1) = \frac{1}{x}$$

Domanda: come sono fatte TUTTE le primitive di $f(x) = \frac{1}{x}$ valide per ogni $x \neq 0$.

Risposta sbagliata: $F(x) = \log|x| + c$. Infatti posso usare due c diversi per $x > 0$ e per $x < 0$

Tutte le primitive sono della forma

$$F(x) = \begin{cases} \log|x| + c_1 & \text{per } x > 0 \\ \log|x| + c_2 & \text{per } x < 0 \end{cases}$$

al variare di c_1 e c_2 in $\mathbb{R}$.

Morale 1: se la zona di definizione è fatta da pezzi diversi, posso usare c diversi in pezzi diversi

Morale 2: aggiungere per abitudine "$+c$"

- non serve per calcolare gli integrali
- non basta in generale per descrivere tutte le primitive.

Quindi è un'abitudine da perdere.

— o — o —

Tecniche di integrazione = come trovare una primitiva di una funzione data

Casi semplici

$f(x) = e^x \qquad F(x) = e^x$

$f(x) = x^\alpha \qquad F(x) = \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} \quad (\text{se } \alpha \neq -1)$

$f(x) = \frac{1}{x} \qquad F(x) = \log|x|$

$f(x) = \sin x \qquad F(x) = -\cos x$

$f(x) = \cos x \qquad F(x) = \sin x$

$f(x) = \sinh x \qquad F(x) = \cosh x$

$f(x) = \cosh x \qquad F(x) = \sinh x$

$f(x) = \frac{1}{1+x^2} \qquad F(x) = \arctan x$

$f(x) = \cos(3x) \qquad F(x) = \frac{1}{3}\sin(3x)$

$f(x) = e^{-7x} \qquad F(x) = -\frac{1}{7}e^{-7x}$

$f(x) = 7^x = e^{x\log 7} \qquad F(x) = \frac{1}{\log 7} 7^x$

$f(x) = \frac{1}{x^3} = x^{-3} \qquad F(x) = -\frac{1}{2}x^{-2} = -\frac{1}{2x^2}$

$f(x) = x\cos(x^2) \qquad F(x) = \frac{1}{2}\sin(x^2)$

$f(x) = x^2 e^{-x^3} \qquad F(x) = -\frac{1}{3}e^{-x^3}$

— o — o —

ANALISI 1 — LEZIONE 056

Titolo nota 01/12/2014

TECNICHE DI INTEGRAZIONE Come determinare una primitiva di una funzione data.

① Primitive elementari (tabellina di derivate al contrario)
② Integrazione per parti
③ Integrazione per sostituzione
④ Integrazione funzioni razionali
⑤ Sostituzioni razionalizzanti

Notazione $\int f(x)\,dx$ = integrale indefinito (senza estremi)
= insieme di tutte le primitive della funzione $f(x)$ (richiede condizioni su $f(x)$)

Più abusivamente, usiamo la notazione dell'integrale indefinito per indicare una qualunque primitiva di $f(x)$.

— o — o —

Restating del teo. fondamentale Sia $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Sia $\Phi : [a,b] \to \mathbb{R}$ una primitiva di $\varphi(x)$.
Allora

$$\boxed{\int_a^b \varphi(x)\,dx = \Phi(a) - \Phi(b)}$$

— o — o —

Siano $f(x)$ e $g(x)$ due funzioni continue in $[a,b]$. Siano $F(x)$ e $G(x)$ due primitive (cioè $G'(x) = g(x)$ e $F'(x) = f(x)$).
Pongo

$$\Phi(x) = F(x) \cdot G(x)$$

Allora

$$\varphi(x) = \Phi'(x) = F'(x)\,G(x) + F(x)\,G'(x)$$

$$= f(x)\,G(x) + F(x)\,g(x)$$

Sostituendo nella formula fondamentale:

$$\int_a^b [f(x)G(x) + F(x)g(x)]\,dx = [F(x)\cdot G(x)]_a^b$$

Riorganizzando i termini

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,G(x)\,dx = [F(x)\,G(x)]_a^b - \int_a^b F(x)\,g(x)\,dx}$$

Formula INTEGRAZ. PER PARTI

Formula abusiva: $\boxed{\int fG = FG - \int Fg}$ Stessa cosa in breve senza estremi

<u>Esempio 1</u> $\int \underset{G}{x}\,\underset{f}{e^{2x}}\,dx = \underset{G}{x}\,\underset{F}{\tfrac{1}{2}e^{2x}} - \int \underset{g}{1}\cdot\underset{F}{\tfrac{1}{2}e^{2x}}\,dx$

$= \frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{1}{2}\int e^{2x}\,dx$

$= \frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x}$

<u>Esempio 2</u> $\int \underset{G}{x^2}\,\underset{f}{\sin(3x)}\,dx = \underset{G}{x^2}\,\underset{F}{\tfrac{1}{3}(-\cos(3x))} - \int \underset{g}{2x}\,\underset{F}{\tfrac{1}{3}(-\cos(3x))}$

$= -\frac{1}{3}x^2\cos(3x) + \frac{2}{3}\int x\cos(3x)\,dx$

Con un altro passaggio per parti

$\int \underset{G}{x}\,\underset{f}{\cos(3x)}\,dx = \underset{G}{x}\,\underset{F}{\tfrac{1}{3}\sin(3x)} - \int \underset{g}{1}\cdot\underset{F}{\tfrac{1}{3}\sin(3x)}\,dx$

$= \frac{1}{3}x\sin(3x) + \frac{1}{9}\cos(3x)$. Quindi

$\int x^2\sin(3x)\,dx = -\frac{1}{3}x^2\cos(3x) + \frac{2}{9}x\sin(3x) + \frac{2}{27}\cos(3x)$.

Oss. Ottenuta una primitiva, è consigliabile fare la verifica derivando (tra l'altro così si ottiene una dimostrazione alternativa che si tratta di una primitiva).

Oss. Con questa tecnica si calcola la primitiva di tutte le funzioni del tipo

$$\boxed{p(x)\, e^{\alpha x} \qquad p(x)\cos(\alpha x) \qquad p(x)\sin(\alpha x)}$$

con $p(x)$ polinomio.

Oss. Tutti i prodotti di due o più funzioni trigonometriche si possono trasformare in somme mediante le formule trigonometriche PRODUCT → SUM.

Esempio 3 $\displaystyle\int \cos^2 x\, dx = \int \underset{G}{\cos x}\cdot \underset{f}{\cos x}\, dx =$

$$= \underset{G}{\cos x}\cdot \underset{F}{\sin x} - \int \underset{g}{(-\sin x)}\, \underset{F}{\sin x}\, dx = \cos x\cdot \sin x + \int \underset{\text{precorso}}{\sin^2 x}\, dx$$

$$= \cos x\cdot\sin x + \int (1-\cos^2 x)\, dx = \cos x\cdot \sin x + x \underbrace{- \int \cos^2 x\, dx}_{\substack{\text{grande ritorno}\\ \text{con coeff.} \neq 1}}$$

Portandolo al LHS:

$$2\int \cos^2 x\, dx = \sin x\cdot \cos x + x$$ divido per 2 e ho finito.

—o—o—

Alternativa precorsistica: $\cos(2x) = 2\cos^2 x - 1$

$$\int \cos^2 x\, dx = \int \frac{\cos(2x)+1}{2}\, dx = \int \frac{1}{2} dx + \frac{1}{2}\int \cos(2x)$$
$$= \frac{x}{2} + \frac{1}{4}\sin(2x)$$

Esempio 4 $\displaystyle \int \underset{G}{e^{2x}} \cdot \underset{f}{\cos x}\,dx = \underset{G}{e^{2x}} \cdot \underset{F}{\sin x} - \int \underset{g}{2e^{2x}} \cdot \underset{F}{\sin x}\,dx$

$$= e^{2x}\sin x - 2\int \underset{\substack{G\\f}}{e^{2x}}\ \underset{\substack{f\\G}}{\sin x}\,dx$$

⇝ provare a vedere

$$= e^{2x}\sin x - 2\left[\underset{G}{e^{2x}}\,\underset{F}{(-\cos x)} - \int \underset{g}{2e^{2x}}\,\underset{F}{(-\cos x)}\,dx\right]$$

$$= e^{2x}\sin x + 2e^{2x}\cos x \underbrace{- 4\int e^{2x}\cos x\,dx}_{\text{GRANDE RITORNO!}}$$

⇝ va al LHS

$$\int e^{2x}\cos x\,dx = \frac{1}{5}e^{2x}\sin x + \frac{2}{5}e^{2x}\cos x$$

⇝ VERIFICA!!

— o — o —

Oss. Con il grande ritorno si fanno le primitive del tipo

$$\boxed{\int e^{\alpha x}\cos(\beta x)\,dx \qquad \int e^{\alpha x}\sin(\beta x)\,dx}$$

ma anche $\displaystyle \int e^{\alpha x}\cos(\beta x)\sin(\gamma x)\cos(\delta x)\,dx$

— o — o —

Esempio 5 $\displaystyle \int \log x\,dx = \int \underset{f}{1}\cdot \underset{G}{\log x}\,dx$

$$= \underset{F}{x}\,\underset{G}{\log x} - \int \underset{F}{x}\cdot\underset{g}{\frac{1}{x}}\,dx = x\log x - \int 1\cdot dx = x\log x - x.$$

Esempio 6 $\displaystyle \int \arctan x\,dx = \int \underset{f}{1}\cdot\underset{G}{\arctan x}\,dx$

$$= \underset{F}{x}\,\underset{G}{\arctan x} - \int \underset{F}{x}\,\underset{g}{\frac{1}{1+x^2}}\,dx = x\arctan x - \frac{1}{2}\int\frac{2x}{1+x^2}\,dx$$

$$= x\arctan x - \frac{1}{2}\log(1+x^2)$$

Oss. La tecnica dell'1 nascosto funziona bene per primitive contenenti $\log x$ e $\arctan x$.

Esempio 7 $\displaystyle\int \tan x \, dx = \int \underset{f}{\sin x} \cdot \underset{G}{\frac{1}{\cos x}} \, dx$

$$= \underset{F}{-\cos x} \cdot \underset{G}{\frac{1}{\cos x}} - \int \underset{F}{(-\cancel{\cos x})} \underset{g}{\left(-\frac{1}{\cos^{\cancel{2}} x}\right)(-\sin x)} \, dx$$

$$= -1 + \int \tan x \, dx$$

Semplificando: $0 = -1$.

— o — o —

ANALISI 1 — LEZIONE 057

Titolo nota 01/12/2014

INTEGRAZIONE PER SOSTITUZIONE

$$\int_a^b \varphi(x)\,dx = \Phi(b) - \Phi(a)$$

Uso la formula con $\Phi(x) = F(G(x))$ (ovviamente supponendo la composizione ben definita)

Allora

$$\varphi(x) = \Phi'(x) = F'(G(x))\,G'(x) = f(G(x))\,g(x)$$

da cui

$$\int_a^b f(G(x))\,g(x)\,dx = F(G(b)) - F(G(a))$$

$$= \left[F(x)\right]_{G(a)}^{G(b)}$$

$$= \int_{G(a)}^{G(b)} f(x)\,dx$$

Oguagliando primo e ultimo si ottiene

$$\boxed{\int_a^b f(G(x))\,g(x)\,dx = \int_{G(a)}^{G(b)} f(x)\,dx}$$

Formula di INTEGRAZIONE PER SOSTITUZIONE

Brutalmente: voglio calcolare il LHS, cioè l'integrale di $f(G(x))\,g(x)$. Pongo $y = G(x)$. Formalmente

$$\frac{dy}{dx} = \text{derivata di } y \text{ rispetto a } x = G'(x) = g(x)$$

Moltiplico per dx e ottengo $dy = g(x)\,dx$.

Ora osservo che per $x = a$ si ha $y = G(a)$

$x = b$ " " $y = G(b)$

Riassumendo:

$$\int_a^b \underbrace{f(G(x))}_{f(y)}\,\underbrace{g(x)\,dx}_{dy} = \int_{G(a)}^{G(b)} f(y)\,dy$$

Esempio 1 $\int x^6 \sin(x^7)\,dx$ Pongo $y = x^7$. Allora $\frac{dy}{dx} = 7x^6$, cioè $dy = 7x^6 dx$

$$= \frac{1}{7}\int \underbrace{\sin(x^7)}_{\sin y} \cdot \underbrace{7x^6 dx}_{dy} = \frac{1}{7}\int \sin y\,dy = -\frac{1}{7}\cos y$$

ritorno in x $= -\frac{1}{7}\cos(x^7)$

In casi di dubbi sul procedimento basta derivare

$$\left[-\frac{1}{7}\cos(x^7)\right]' = -\frac{1}{7}(-\sin(x^7))\cdot 7x^6 = x^6\sin(x^7) \quad \text{ok.}$$

Esempio 2 $\int \tan x\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx$ Pongo $y = \cos x$

$\frac{dy}{dx} = -\sin x$

$dy = -\sin x\,dx$

$$= -\int \frac{1}{\cos x}\overbrace{(-\sin x\,dx)}^{dy}$$

$$= -\int \frac{1}{y}\,dy = -\log|y| = -\log|\cos x| = \log\frac{1}{|\cos x|}$$

Per ogni $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ si ha che $\log\frac{1}{|\cos x|}$ ha come derivata $\tan x$.

Esempio 3 $\int \frac{\log^4 x}{x}\,dx$ Pongo $y = \log x$, quindi $dy = \frac{1}{x}dx$

$$= \int \underbrace{\log^4 x}_{y^4} \cdot \underbrace{\frac{1}{x}dx}_{dy} = \int y^4 dy = \frac{1}{5}y^5 = \frac{1}{5}\log^5 x$$

Esempio 4 $\int \frac{1}{x \log^4 x}\,dx$ = come prima

$\int \frac{1}{y^4}\,dy = -\frac{1}{3}\frac{1}{y^3} = -\frac{1}{3}\frac{1}{\log^3 y}$

Esempio 5 $\int \frac{1}{x \log x}\,dx = \ldots = \int \frac{1}{y}\,dy = \log|y| = \log|\log x|$

Esempio 6 $\int \log^2 x\,dx = \int \underset{f}{1} \cdot \underset{G}{\log^2 x}\,dx =$

$= \underset{F}{x}\ \underset{G}{\log^2 x} - \int \underset{F}{\cancel{x}} \cdot \underset{g}{2\log x \cdot \frac{1}{\cancel{x}}} = x\log^2 x - 2\int \log x\,dx$

$= x\log^2 x - 2x\log x + 2x$

Si poteva fare per sostituzione? $y = \log x \qquad dy = \frac{1}{x}dx$

$\int \log^2 x\,dx = \int \underset{e^y}{x}\,\underbrace{\log^2 x}_{y^2} \cdot \underbrace{\frac{1}{x}dx}_{dy} = \int y^2 e^y\,dy$ = si fa per parti e poi si sostituisce $y = \log x$

Esempio 7 $\int \sqrt{1-x^2}\,dx$ Provo la sostituzione $x = \sin y$

$\frac{dx}{dy} = \cos y \qquad dx = \cos y \cdot dy$

$= \int \sqrt{1-\sin^2 y}\,\cos y\,dy = \int \cos^2 y\,dy = \frac{y}{2} + \frac{1}{2}\cos y \cdot \sin y$

$= \frac{1}{2}\arcsin x + \frac{1}{2}x \cdot \cos(\arcsin x)$

$\cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1-\sin^2(\arcsin x)} = \sqrt{1-x^2}$

$\cos(\alpha) = \sqrt{1-\sin^2\alpha}$

Conclusione: $\int \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\arcsin x + \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}$.

Salvo la faccia: per ogni $x \in [-1,1]$ derivo e verifico.

$\boxed{\text{Potenze di } \sin x \text{ e } \cos x}$ Come calcolare $\int \sin^k x\,dx$ $\int \cos^k x\,dx$

$\boxed{1^\circ \text{ modo}}$ Cercare formule precostistiche per ridurle a somme di funzioni trigonometriche senza esponenti (per $k=2$ è la strada migliore)

$\boxed{2^\circ \text{ modo}}$ Induzione + grande ritorno

$$\int \cos^k x\,dx = \int \underset{f}{\cos x} \cdot \underset{G}{\cos^{k-1} x}\,dx$$

$$= \sin x \cdot \cos^{k-1} x - \int \sin x \cdot (k-1)\cos^{k-2} x \cdot (-\sin x)\,dx$$

$$= \sin x \cdot \cos^{k-1} x + (k-1)\int \cos^{k-2} x \cdot \underset{\substack{\downarrow \\ 1-\cos^2 x}}{\sin^2 x}\,dx$$

$$= \sin x \cdot \cos^{k-1} x + (k-1)\int \cos^{k-2} x\,dx - \underbrace{(k-1)\int \cos^k x\,dx}_{\text{GRANDE RITORNO}}$$

Portandolo al LHS si esprime $\int \cos^k x\,dx$ in termini di $\int \cos^{k-2} x\,dx$ e roba da non integrare più.

$\boxed{3^\circ \text{ modo}}$ Solo per i k dispari si può integrare per sostituzione.

$$\int \cos^7 x\,dx = \int \cos x \cdot \cos^6 x\,dx = \int \cos x\,(1-\sin^2 x)^3\,dx$$

Pongo $y = \sin x$, quindi $\frac{dy}{dx} = \cos x$, cioè $dy = \cos x\,dx$

$$= \int (1-y^2)^3\,dy = \int (1-3y^2+3y^4-y^6)\,dy$$

$$= y - y^3 + \frac{3}{5}y^5 - \frac{1}{7}y^7 = \sin x - \sin^3 x + \frac{3}{5}\sin^5 x - \frac{1}{7}\sin^7 x$$

Esempio $\underbrace{\int \frac{x}{1+x^4}\,dx}_{\text{FACILE}}$ $\int \frac{x^2}{1+x^4}\,dx$ $\underbrace{\int \frac{x^3}{1+x^4}\,dx}_{\text{BANALE}}$

$$\int \frac{x^3}{1+x^4}\,dx = \frac{1}{4}\int \frac{4x^3}{1+x^4}\,dx = \frac{1}{4}\log(1+x^4)$$

$y = 1+x^4$ oppure anche $y = x^4$

$$\int \frac{x}{1+x^4}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{1+x^4}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{1+(x^2)^2}\,dx = \frac{1}{2}\arctan(x^2)$$

(Si poteva fare con il cambio di variabili $y = x^2$)

— o — o —

ANALISI 1 — LEZIONE 058

Titolo nota 02/12/2014

INTEGRAZIONE DELLE FUNZIONI RAZIONALI

Def. Una funzione razionale è una funzione del tipo

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

dove $P(x)$ e $Q(x)$ sono polinomi. Questa è definita dove $Q(x) \neq 0$. Posso sempre assumere che $P(x)$ e $Q(x)$ non abbiano fattori in comune.

Teorema Ogni funzione razionale $f(x)$ ha una primitiva che è combinazione lineare di funzioni razionali e funzioni del tipo $\arctan(ax^2+bx+c)$ e $\log(ax^2+bx+c)$.

Algoritmo
1. Divisione
2. Fattorizzazione
3. Sistema lineare
4. Integrazione dei pezzi elementari

① $\boxed{\text{DIVISIONE}}$ Se $\deg(P(x)) < \deg(Q(x))$ non c'è nulla da fare. Se $\deg(P(x)) \geq \deg(Q(x))$, allora faccio la divisione tra polinomi, cioè scrivo

$$P(x) = Q(x)\underbrace{A(x)}_{\text{quoziente}} + \underbrace{R(x)}_{\text{resto}}$$

con $\deg(R(x)) < \deg(Q(x))$.

Tornando alla funzione razionale

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \boxed{A(x)} + \frac{R(x)}{Q(x)}$$

polinomio, facile da integrare

nuova funz. raz., con deg (num) < deg (denom.)

Conseguenza: se so integrare le funz. raz. con deg (num) < deg (denom), le so integrare tutte.

② FATTORIZZAZIONE Scompongo il denominatore $Q(x)$.

Fatto generale Ogni polinomio $Q(x) \in \mathbb{R}[x]$ si scrive come prodotto di fattori di 1° grado o di 2° grado (non ulteriormente scomponibili in $\mathbb{R}[x]$). Alcuni fattori possono essere ripetuti, ed il numero di volte in cui un fattore compare si chiama molteplicità.

$$\boxed{Q(x) = \prod_{i=1}^{k} (a_i x + b_i)^{m_i} \cdot \prod_{i=1}^{\ell} (A_i x^2 + B_i x + C_i)^{M_i}}$$

Nota bene: $\deg(Q(x)) = \sum_{i=1}^{k} m_i + \sum_{i=1}^{\ell} 2M_i$

È importante che i fattori $A_i x^2 + B_i x + C_i$ siano non ulteriormente scomponibili, cioè $B_i^2 - 4A_iC_i < 0$ per $i = 1, \dots, \ell$.

③ SISTEMA LINEARE : DECOMPOSIZIONE DELLA FUNZIONE RAZ.

Idea: scrivere la funzione razionale come somma di funzioni razionali più semplici

Due metodi: → decomposizione in fratti semplici
→ metodo di HERMITE

Decomposizione in fratti semplici

Caso semplice: se nella fatt. di $Q(x)$ tutte le molteplicità sono 1 (cioè $m_i = M_i = 1$), allora si può scrivere $\frac{P(x)}{Q(x)}$ come comb. lineare di frazioni del tipo
con $\deg(P) < \deg(Q)$

$$\boxed{\frac{1}{a_i x + b_i}} \qquad \boxed{\frac{1}{A_i x^2 + B_i x + C_i}} \qquad \boxed{\frac{x}{A_i x^2 + B_i x + C_i}}$$

Esempio
$$\frac{x^3+2x}{x^4-1} = \frac{x^3+2x}{(x+1)(x-1)(x^2+1)}$$
$$= \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1} + \frac{Cx+D}{x^2+1}$$

Esistono unici A, B, C, D per cui la decomposizione funziona. Come trovo A, B, C, D? Con il sistema lineare!

$$\frac{A(x-1)(x^2+1) + B(x+1)(x^2+1) + (Cx+D)(x^2-1)}{(x+1)(x-1)(x^2+1)}$$

espandendo il numeratore, ottengo un pol. di 3° grado i cui coeff. sono comb. lin. di A, B, C, D.
Uguagliando i coeff a quelli di x^3+2x ottengo un sistema lineare di 4 equ. in 4 incognite. Questo sistema ha magicamente soluz. unica.

Caso generale Se ci sono le molteplicità, devo usare tutte le potenze dei fattori al denominatore fino alla molteplicità

Esempio
$$\frac{P(x)}{(x-1)^3(x+2)(x^2+1)^2} =$$

8 equ. in 8 incognite

$$\frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{(x-1)^3} + \frac{D}{x+2} + \frac{Ex+F}{x^2+1} + \frac{Gx+H}{(x^2+1)^2}$$

Decomposizione di Hermite .

In assenza di molteplicità è uguale alla precedente

Se ci sono molteplicità, allora si scrive

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \text{stessi termini come se le molteplicità fossero uguali ad 1} + \frac{d}{dx}\frac{\hat{P}(x)}{\hat{Q}(x)}$$

dove

- $\hat{Q}(x)$ è il polinomio che ha gli stessi fattori di $Q(x)$, ma con tutte le molteplicità calate di 1,
- $\hat{P}(x)$ è un polinomio a coeff. incogniti con
$$\deg(\hat{P}) = \deg(\hat{Q}) - 1.$$

Esempio

$$\frac{P(x)}{(x-1)^3(x+2)(x^2+1)^2} \rightarrow$$

8 coeff. incogniti

$$\frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} + \frac{Cx+D}{x^2+1} + \frac{d}{dx}\frac{Ex^3+Fx^2+Gx+H}{\underbrace{(x-1)^2(x^2+1)^1}}$$

parte inutilizzata del vecchio denominatore

4 INTEGRAZIONE DELLE FRAZIONI ELEMENTARI

Se ho decomposto alla Hermite, devo saper integrare frazioni del tipo

$$\boxed{\frac{A}{ax+b}} \qquad \boxed{\frac{Dx+E}{Ax^2+Bx+C}}$$

denom. non scomponibile

Se ho decomposto alla 1ª maniera, devo saper integrare anche

$$\boxed{\frac{A}{(ax+b)^m}} \qquad \boxed{\frac{Dx+E}{(Ax^2+Bx+C)^m}}$$

Ora $$\int \frac{A}{ax+b}\,dx = \frac{A}{a}\log(ax+b)$$

$$\int \frac{A}{(ax+b)^m}\,dx = \frac{A}{a}\,\frac{1}{1-m}\,\frac{1}{(ax+b)^{m-1}}$$

Esempi $$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan x$$

$$\int \frac{x}{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\log(1+x^2)$$

$$\int \frac{3x+5}{1+x^2}\,dx = \frac{3}{2}\log(1+x^2) + 5\arctan x$$

$$\int \frac{1}{x^2+2x+2}\,dx = \int \frac{1}{1+(x+1)^2}\,dx = \arctan(x+1)$$

$$\int \frac{1}{2+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+\frac{x^2}{2}}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2}\,dx$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\arctan\frac{x}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{x}{\sqrt{2}}$$

In generale: $$\boxed{\int \frac{1}{a+x^2}\,dx = \frac{1}{\sqrt{a}}\arctan\frac{x}{\sqrt{a}}}$$ se $a>0$

ANALISI 1 — LEZIONE 059

Titolo nota 02/12/2014

Punto della situazione sulla scomposizione di polinomi

STEP 1 Ogni polinomio $P(x) \in \mathbb{C}[x]$ non costante ammette almeno una radice complessa, cioè

$$\forall P(x) \in \mathbb{C}[x] \quad \exists \alpha \in \mathbb{C} \quad \text{t.c. } P(\alpha) = 0$$

Non Dim Teorema fondamentale dell'algebra

STEP 2 Ogni polinomio $P(x) \in \mathbb{C}[x]$ di grado n si scrive come prodotto di n fattori di 1° grado, cioè

$$P(x) = \underset{\text{coeff. di } x^n}{a_n} (x-\alpha_1) \cdot \ldots \cdot (x - \alpha_n)$$

dove $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ sono le radici, eventualmente ripetute

Dim Teo. Ruffini + induzione sul grado. Se α è una radice di $P(x)$, allora posso dividere

$$P(x) = (x-\alpha)\, Q(x)$$

$\deg Q = n-1 \leadsto$ induzione.

STEP 3 Se $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ e $\alpha \in \mathbb{C}$ è una radice, allora anche $\bar{\alpha}$ è una radice (cioè $P(\alpha) = 0 \Rightarrow P(\bar{\alpha}) = 0$)

Dim. $P(\alpha) = 0$ Faccio il coniugato e ottengo

$$0 = \overline{P(\alpha)} \underset{P \text{ è a coeff. reali}}{=} P(\bar{\alpha})$$

STEP 4 Se $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ e $\alpha \in \mathbb{C}$ è una radice, allora α e $\bar{\alpha}$ hanno la stessa molteplicità

$\boxed{\text{Dim.}}$ m = molteplicità di α $\Rightarrow$ $(x-\alpha)^m$ divide $P(x)$
$\Rightarrow$ $(x-\bar{\alpha})^m$ divide $P(x)$ (uso qui i coeff. reali)
$\Rightarrow$ $\bar{\alpha}$ ha molteplicità $\geq m$.
Scambiando il ruolo di α e $\bar{\alpha}$ ottengo la disug. opposta.

$\boxed{\text{STEP 5}}$ Vale la fattorizzazione reale come enunciata alla lezione precedente.

$\boxed{\text{Dim.}}$ Fattorizzo $P(x)$ sui complessi

$$P(x) = a_n \underbrace{(x-\alpha_1)\cdots(x-\alpha_k)}_{\text{radici reali, magari con molteplicità}} \underbrace{(x-\beta_1)(x-\bar{\beta}_1)}\underbrace{(x-\beta_2)(x-\bar{\beta}_2)}\cdots$$

Ora $(x-\beta_1)(x-\bar{\beta}_1)$ = pol. di 2° grado a coeff. reali non ulteriormente scomponibile

$\beta = a + ib$ $\qquad (x-\beta)(x-\bar{\beta}) = x^2 - 2ax + (a^2+b^2)$

— o — o —

$\boxed{\text{Perchè funziona la scomposizione in fratti semplici}}$

Si dimostra per induzione sul numero di fattori del denominatore. Il punto fondamentale è un lemma.

<u>Lemma</u> Se $Q(x) = Q_1(x) \cdot Q_2(x)$, con $Q_1(x)$ e $Q_2(x)$ senza fattori in comune, allora

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A(x)}{Q_1(x)} + \frac{B(x)}{Q_2(x)}$$

$\boxed{\text{Dim.}}$ Intanto basta farlo quando $P(x) = 1$. Poiché $Q_1(x)$ e $Q_2(x)$ sono privi di fattori in comune, il loro MCD è 1, quindi per Bezout polinomiale esistono $A(x)$ e $B(x)$ t.c.

$$1 = B(x)\,Q_1(x) + A(x)\,Q_2(x).$$

Dividendo per $Q_1(x)\,Q_2(x)$ ho la tesi.

— o — o —

A questo p.to mi ritrovo tutti termini del tipo

$$\frac{A(x)}{(ax+b)^m} \rightsquigarrow \sum_{i=1}^{m} \frac{C_i}{(ax+b)^i} \qquad\qquad \frac{A(x)}{(Ax^2+Bx+C)^M} \rightsquigarrow \sum_{i=1}^{M} \frac{C_i x + D_i}{(Ax^2+Bx+C)^i}$$

$A(x)$ lo posso scrivere come comb. lin. di $1, x, x^2, \dots$, ma lo posso scrivere anche come comb. lin. di $1, (ax+b), (ax+b)^2, \dots$

quindi

$$A(x) = \sum c_i (ax+b)^i$$

e dividendo ho la tesi.

Per i fattori di 2° grado è simile.

—— o —— o ——

Esempio $\displaystyle\int \frac{3x+5}{x^2+2x+2}\,dx$ ⤳ se non c'è la x lo so fare con arctan$x$

⤳ mi libero della x puntando al log

$$\frac{3x+5}{x^2+2x+2} = \frac{3x+3}{x^2+2x+2} + \frac{2}{x^2+2x+2}$$

$$= \frac{3}{2}\,\frac{2x+2}{x^2+2x+2} + \frac{2}{x^2+2x+2}$$

$$\frac{3}{2}\log(x^2+2x+2) + 2\arctan(x+1)$$

Più in generale

$$\frac{Dx+E}{Ax^2+Bx+C} = \boxed{\frac{D}{2A}\,\frac{2Ax+B}{Ax^2+Bx+C}} + \boxed{\frac{E-\frac{DB}{2A}}{Ax^2+Bx+C}}$$

$$\frac{D}{2A}\log(Ax^2+Bx+C) \qquad\qquad \arctan$$

Per i termini del tipo $\frac{1}{Ax^2+Bx+C}$, basta scrivere il denominatore come costante + quadrato

$$\begin{aligned} Ax^2+Bx+C &= A\left(x^2+\frac{B}{A}x+\frac{C}{A}\right) \\ &= A\left(x^2+\frac{B}{A}x+\frac{B^2}{4A^2}-\frac{B^2}{4A^2}+\frac{C}{A}\right) \\ &= A\left[\left(x+\frac{B}{2A}\right)^2+\frac{C}{A}-\frac{B^2}{4A^2}\right] \\ &= A\underbrace{\left(x+\frac{B}{2A}\right)^2}_{\text{Quadrato}}+\underbrace{\boxed{\frac{4AC-B^2}{4A}}}_{\text{positivo perché } \Delta<0} \end{aligned}$$

Restano (volendo) i termini del tipo $\frac{Dx+E}{(Ax^2+Bx+C)^m}$

<u>Esempio</u> $\int \frac{3x+4}{(x^2+1)^3}\,dx = 3\int \frac{x}{(x^2+1)^3}\,dx + 4\int\frac{1}{(x^2+1)^3}\,dx$

In generale $\int \frac{x}{(x^2+1)^m}\,dx = \frac{1}{2}\int\frac{2x}{(x^2+1)^m}\,dx$ $(y=x^2+1)$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{1}{1-m}\,\frac{1}{(x^2+1)^{m-1}}$$

$$\int \frac{1}{(x^2+1)^m}\,dx = \underbrace{\boxed{\int\frac{1+x^2}{(x^2+1)^m}\,dx}}_{\text{esponente } m-1} - \int\frac{x^2}{(x^2+1)^m}\,dx$$

$$\int \frac{x^2}{(x^2+1)^m}\,dx = \int \underbrace{x}_{G}\cdot\underbrace{\frac{x}{(x^2+1)^m}}_{f}\,dx =$$

$$\underbrace{x}_{G}\cdot\underbrace{\frac{1}{2}\,\frac{1}{1-m}\,\frac{1}{(x^2+1)^{m-1}}}_{F} - \int \underbrace{1}_{g}\cdot\underbrace{\frac{1}{2(1-m)}\underbrace{\boxed{\frac{1}{(x^2+1)^{m-1}}}}_{\text{esponente } m-1}}_{F}\,dx$$

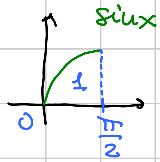
Se lo so fare con $m-1$, lo so fare con m.

<u>Oss.</u> Con Hermite, questi non servono.

ANALISI 1 — LEZIONE 060

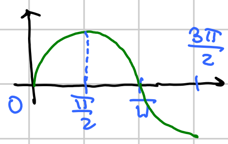
Titolo nota 04/12/2014

Esempio 1 $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin x \, dx = \left[-\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = -\cos\frac{\pi}{2} + \cos 0 = 1$



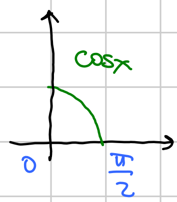
Occhio ai segni, ma bisogna essere consapevoli che viene >0 in quando l' integranda è ≥ 0 e non identicamente nulla nella zona di integrazione

Esempio 2 $\displaystyle\int_0^{\pi} \sin x \, dx = 2$



$$\int_0^{3\pi/2} \sin x \, dx = 1$$

Esempio 3 $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos x \, dx = \left[\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \sin\frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1$



Per ridursi all' esempio 1 uso un cambio di variabili

$y = \frac{\pi}{2} - x$ da cui $dy = -dx$

Cambio gli estremi: quando $x=0$ ho $y = \frac{\pi}{2}$, quando $x = \frac{\pi}{2}$ ho $y=0$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \cos\left(\frac{\pi}{2} - y\right)(-dy) = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{inverte gli estremi}}}{-}\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \underset{\substack{\| \\ \sin y}}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - y\right)}\, dy$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin y \, dy$$

Esempio 4 $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^2 x \, dx$

$\boxed{\text{1° modo}}$ Calcolo la primitiva sfruttando $\cos(2x) = 1 - 2\sin^2 x$

$$\int_0^{\pi/2} \sin^2 dx = \int_0^{\pi/2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2x)\right) dx = \ldots$$

$\boxed{2^\circ \text{ modo}}$ Sfrutto le simmetria, cioè

$$\int_0^{\pi/2} \sin^2 x \, dx = \int_0^{\pi/2} \cos^2 x \, dx \quad \text{(stessa dim. dell' esempio 3)}$$

Chiamo I il valore comune. Ora

$$2I = \int_0^{\pi/2} (\sin^2 x + \cos^2 x) \, dx = \int_0^{\pi/2} 1 \, dx = \frac{\pi}{2}$$

e quindi $I = \frac{\pi}{4}$

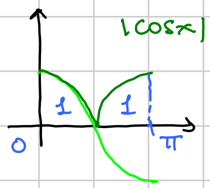
$\boxed{\text{Fatto generale}}$ Per ogni $h \in \mathbb{Z}$ e $k \in \mathbb{Z}$ vale la relazione

$$\boxed{\int_{\frac{k\pi}{2}}^{\frac{h\pi}{2}} \sin^2 x \, dx = \int_{\frac{k\pi}{2}}^{\frac{h\pi}{2}} \cos^2 x \, dx = (h-k)\frac{\pi}{4}}$$

Integrale di $\sin^2 x$ o $\cos^2 x$ = metà lunghezza della zona di integrazione

Achtung! Non vale se gli estremi non sono multipli di $\frac{\pi}{2}$.

Esempio 5 $\displaystyle\int_0^{\pi} |\cos x| \, dx = 2$



$$\int_0^{\pi} |x \cos x| \, dx$$

Evitare cose creative, tipo
primitiva di $|f(x)|$ = | primitiva di $f(x)$|

Procedimento sicuro: dividere l'integrale a seconda del segno dell'argomento del valore assoluto

$$\int_0^{\pi} |x \cos x| \, dx = \int_0^{\pi/2} |x \cos x| \, dx + \int_{\pi/2}^{\pi} |x \cos x| \, dx$$

$$= \int_0^{\pi/2} x \cos x \, dx - \int_{\pi/2}^{\pi} x \cos x \, dx$$

$$\int \underset{G}{x}\,\underset{f}{\cos x}\,dx = \underset{G}{x}\,\underset{F}{\sin x} - \int \underset{g}{\sin x}\,\underset{F}{dx} = x\sin x + \cos x$$

(Verifica!)

$$= \left[x\sin x + \cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \left[x\sin x + \cos x\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$$

$$= \frac{\pi}{2} - 1 + 1 + \frac{\pi}{2} = \pi$$

si devono sommare

<u>Esempio 6</u> $\displaystyle\int_{-3}^{3} x \arctan(x^2+5)\,dx = 0$

Fatto generale Se $f(x)$ è dispari (e continua), allora

$$\boxed{\int_{-A}^{A} f(x)\,dx = 0 \qquad \forall A > 0}$$

Segue dal fatto che per $f(x)$ dispari vale la relazione

$$\boxed{\int_0^A f(x)\,dx = -\int_{-A}^{0} f(x)\,dx}$$

Segue dal cambio di variabili $x = -y \rightsquigarrow dx = -dy$

$x = 0 \rightsquigarrow y = 0$

$x = A \rightsquigarrow y = -A$

$$\int_0^A f(x)\,dx = \int_0^{-A} f(-y)(-dy) = \int_0^{-A} \underbrace{-f(-y)}_{f(y)}\,dy$$

$$= \int_0^{-A} f(y)\,dy = -\int_{-A}^{0} f(y)\,dy$$

Analogo per le funzioni pari:

$$\boxed{\int_0^A f(x)\,dx = \int_{-A}^{0} f(x)\,dx}$$

Esempio 7 $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1+\cos^2 x}\,dx = \int_0^{\pi} \underset{G}{x}\, \underset{f}{\frac{\sin x}{1+\cos^2 x}}\,dx$

$$= \Big[\underset{G}{x}\,\underset{F}{(-\arctan(\cos x))}\Big]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \underset{g}{}\,\underset{F}{(-\arctan(\cos x))}\,dx$$

$$= \pi\,(-\arctan(-1)) + \underbrace{\int_0^{\pi} \arctan(\cos x)\,dx}_{\substack{\parallel \\ 0}}$$

$$= \frac{\pi^2}{4}$$

0 per simmetria rispetto a $\frac{\pi}{2}$

Per formalizzare la simmetria pongo $x = \pi - y \rightsquigarrow dx = -dy$

$x = 0 \rightsquigarrow y = \pi$

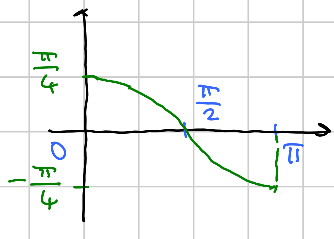
$x = \pi \rightsquigarrow y = 0$

$$\int_0^{\pi} \arctan(\cos x)\,dx = \int_{\pi}^{0} \underbrace{\arctan(\underbrace{\cos(\pi - y)}_{-\cos y})}_{-\arctan(\cos y)}\,(-dy)$$

$$= \int_{\pi}^{0} \arctan(\cos y)\,dy$$

$$= -\int_0^{\pi} \arctan(\cos y)\,dy$$

Confrontando RHS e LHS, l'unica possibilità è che siano 0



Esempio 8 $\displaystyle\int_{-3}^{3} \frac{1}{x}\,dx$

Non è un integrale proprio perché l'integranda non è limitata nella zona di integrazione.

Esempio 9 Se $f(x)$ è pari e integrabile in $[-A,A]$, posso dedurre che

$$\int_0^A f(x)\,dx = \int_{-A}^0 f(x)\,dx \qquad ?$$

Devo "smontare la definizione", andando ad un enunciato ancora più generale, del tipo

$$I^+(f,[0,A]) = I^+(f,[-A,0])$$
$$I^-(\ \dots\ ) = I^-(\ \dots\ )$$

Per dimostrare una qualunque di queste, basta osservare che se $\varphi(x)$ è a scalino e

$$\varphi(x) \geq f(x) \qquad \forall\, x \in [0,A]$$

allora

$$\varphi(-x) \geq f(x) \qquad \forall\, x \in [-A,0]$$

e

$$\int \varphi(-x)\,dx = \int \varphi(x)$$

perchè somme algebriche di aree di rettangoli equivalenti.

Analogamente per le funzioni dispari si ottiene

$$I^+(f,[0,A]) = -\,I^-(f,[-A,0])$$

$$I^-(f,[0,A]) = -\,I^+(f,[-A,0])$$

(somme di Riemann inferiori / superiori si scambiano).

— o — o —

ANALISI 1 – LEZIONE 061

Titolo nota 04/12/2014

Esempio 1 $\int \frac{dx}{x^2-1}$

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1}$$ Come trovo A e B ?

$\boxed{1^\circ \text{ modo}}$ Sistema lineare $\frac{1}{x^2-1} = \frac{Ax-A+Bx+B}{(x+1)(x-1)}$

$A+B=0$ (coeff. x)

$-A+B=1$ (termine noto)

$\boxed{B=\frac{1}{2}}$ $\boxed{A=-\frac{1}{2}}$

$\boxed{2^\circ \text{ modo}}$ Moltiplico per $x+1$: $\frac{1}{x-1} = A + B\frac{x+1}{x-1}$

pongo $x=-1$ e trovo $A=-\frac{1}{2}$

Moltiplico per $x-1$: $\frac{1}{x+1} = \frac{A(x-1)}{x+1} + B$. Pongo $x=1$ e trovo $B=\frac{1}{2}$

Oss. Il secondo modo funziona anche con tanti termini e anche quando ci sono fattori di 2° grado, ma bisogna sostituire ad x le radici complesse coniugate.

Finale: $$\int \frac{1}{x^2-1}\,dx = -\frac{1}{2}\int \frac{1}{x+1}\,dx + \frac{1}{2}\int \frac{1}{x-1}\,dx$$

$$= -\frac{1}{2}\log|x+1| + \frac{1}{2}\log|x-1| = \log\sqrt{\frac{|x-1|}{|x+1|}}$$

Esempio 2 $\int \frac{e^x}{e^{2x}-1}\,dx$ Pongo $y=e^x \rightsquigarrow dy = e^x\,dx$

$$= \int \frac{1}{y^2-1}\,dy = \log\sqrt{\frac{|y-1|}{|y+1|}} = \log\sqrt{\frac{|e^x-1|}{e^x+1}}$$

Oss. Con lo stesso sistema si calcolano le primitive del tipo

funzione razionale

$$\int \mathrm{Raz}(e^x)\,dx$$

Esempio 3 $\displaystyle\int \frac{1}{e^{2x}-1}\,dx = \int \frac{e^x}{e^x(e^{2x}-1)}\,dx$ $\quad y = e^x \rightsquigarrow dy = e^x dx$

$= \displaystyle\int \frac{1}{y(y^2-1)}\,dy$ e questo si fa...

$$\frac{1}{y(y^2-1)} = \frac{A}{y} + \frac{B}{y+1} + \frac{C}{y-1}$$

Molt. per y e pongo $y=0 \rightsquigarrow A = -1$
Molt. per $y+1$ e pongo $y=-1 \rightsquigarrow B = \frac{1}{2}$
Molt. per $y-1$ e pongo $y=1 \rightsquigarrow C = \frac{1}{2}$
Verifica!

$$= -\log|y| + \frac{1}{2}\log|y+1| + \frac{1}{2}\log|y-1|$$

$$= -x + \frac{1}{2}\log(e^x+1) + \frac{1}{2}\log|e^x-1|$$ (verifica!)

Esempio 4 $\displaystyle\int \frac{1}{e^{2x}+1}\,dx$ $\quad$ Pongo $y = e^x$, $dy = e^x dx$

$\displaystyle\int \frac{1}{e^{2x}+1}\,dx = \int \frac{e^x}{e^x(e^{2x}+1)}\,dx = \int \frac{dy}{y(y^2+1)}$ e si chiude

$$\frac{1}{y(y^2+1)} = \frac{A}{y} + \frac{By+C}{y^2+1} = \ldots$$

Metodo alternativo $\quad$ Pongo $y = e^{2x}$, $dy = 2e^{2x}dx$

$$\int \frac{1}{e^{2x}+1}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2e^{2x}}{e^{2x}(e^{2x}+1)}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{dy}{y(y+1)}$$

$$= \frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{y+1}\right)dy = \frac{1}{2}\log|y| - \frac{1}{2}\log|y+1|$$

$$= x - \frac{1}{2}\log(1+e^{2x})$$ Verifica!

— o — o —

Esempio 5 $\displaystyle\int \frac{8^x}{2^x+5}\,dx$ $\quad$ Pongo $y = 2^x \rightsquigarrow dy = 2^x \log 2\,dx$

$= \displaystyle\frac{1}{\log 2}\int \frac{y^2}{y+5}\,dy$ si fa.

Esempio 6 $\displaystyle\int \frac{x+3}{\sqrt{x}+2}\,dx$ Pongo $y=\sqrt{x} \rightsquigarrow dy = \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx$

$$= 2\int \frac{x+3}{\sqrt{x}+2}\sqrt{x}\,\underbrace{\boxed{\frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx}}_{dy} = 2\int \frac{y^2+3}{y+2}\,y\,dy$$

Pongo $x=y^2 \rightsquigarrow dx = 2y\,dy$

$$\int \frac{x+3}{\sqrt{x}+2}\,\boxed{dx} = \int \frac{y^2+3}{y+2}\,\boxed{2y\,dy}$$

Si finisce facilmente

Esempio 7 $\displaystyle\int \frac{x+3}{\sqrt[3]{x}+2}\,dx$ Pongo $x=y^3 \rightsquigarrow dx = 3y^2\,dy$

$= \displaystyle\int \frac{y^3+3}{y+2}\cdot 3y^2\,dy$ $\rightsquigarrow$ si fa con la divisione

Esempio 8 $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x+1}+x}{\sqrt[3]{x+1}+2}\,dx$ Pongo $y=x+1 \rightsquigarrow dy=dx$

$= \displaystyle\int \frac{\sqrt{y}+y-1}{\sqrt[3]{y}+2}\,dy$ Pongo $y=z^6 \rightsquigarrow dy = 6z^5\,dz$

$= \displaystyle\int \frac{z^3+z^6-1}{z^2+2}\,6z^5\,dz$ e da qui si finisce

Fatto generale: se ci sono tante radici ma con indici diversi, basta usare il minimo comune multiplo degli indici, MA gli argomenti delle radici devono essere gli stessi

$\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x+1}+2}\,dx$ Pongo $\sqrt{x+1}=y \rightsquigarrow x=y^2-1 \rightsquigarrow dx = 2y\,dy$

$= \displaystyle\int \frac{\sqrt{y^2-1}+1}{y+2}\,2y\,dy$

Esempio 9 $\int \sqrt{\frac{x+3}{x-2}}\,dx$ Pongo $y = \sqrt{\frac{x+3}{x-2}}$

Idea buona: quando vado a ricavare è di 1° grado in x !!!

$y^2 = \frac{x+3}{x-2}$, $(x-2)y^2 = x+3$, $x(y^2-1) = 3+2y^2$

quindi $x = \frac{3+2y^2}{y^2-1}$ da cui $dx = \left(\frac{3+2y^2}{y^2-1}\right)' dy$

Quindi dopo il cambio di variabili trovo

$$\int \underset{G}{y} \underset{f}{\left(\frac{3+2y^2}{y^2-1}\right)'} dy = \underset{G}{y} \cdot \underset{F}{\frac{3+2y^2}{y^2-1}} - \int \underset{g}{\,} \underset{F}{\frac{3+2y^2}{y^2-1}} dy$$

Fatto generale: quando un integrale contiene $\sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}}$, più eventualmente potenze di x, si può porre la radice $= y$ e funziona la stessa tecnica.

Esempio 10 $\int \frac{x^2}{x^4+1}\,dx$ bisogna fare l'algoritmo generale

Devo scomporre x^4+1 come prodotto di 2 polinomi di 2° grado.

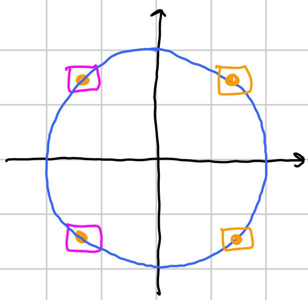
$\boxed{\text{1° modo}}$ Passo attraverso le radici complesse: $x^4 = -1$, cioè

$x = \frac{1 \pm i}{\sqrt{2}}$ $x = \frac{-1 \pm i}{\sqrt{2}}$ e accoppiandole trovo la fatt. reale

$x = a \pm ib \rightsquigarrow x^2 - 2ax + (a^2+b^2)$

$x = \frac{1}{\sqrt{2}} \pm \frac{1}{\sqrt{2}} i \rightsquigarrow x^2 - \sqrt{2}x + 1 \leftarrow$

$x = -\frac{1}{\sqrt{2}} \pm \frac{1}{\sqrt{2}} i \rightsquigarrow x^2 + \sqrt{2}x + 1 \leftarrow$



$\boxed{2^o \text{ modo}}$ Senza passare per i complessi

$$x^4+1 = x^4+2x^2+1-2x^2 = \underbrace{(x^2+1)^2}_{A^2} \underbrace{-}_{-} \underbrace{(\sqrt{2}x)^2}_{B^2}$$

$$= \underbrace{(x^2+1+\sqrt{2}x)}_{(A+B)}\underbrace{(x^2+1-\sqrt{2}x)}_{(A-B)}$$

<u>Esercizio</u> Vedere come fattorizzare $x^4+x^3+x^2+x+1$.

— o — o —

ANALISI 1 — LEZIONE 062

Titolo nota 09/12/2014

<u>Sostituzioni razionalizzanti</u>

① $\int \mathrm{Raz}(e^x)\,dx$

funzione razionale

② $\int \mathrm{Raz}(x, \sqrt{ax+b})\,dx$ o più in gen.

$\int \mathrm{Raz}\left(x, \sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx$

③ $\int \mathrm{Raz}(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\,dx$

④ $\int \mathrm{Raz}(\sin x, \cos x)\,dx$

Caso ③ Tre metodi → basato sul coeff. di x^2
→ basato sulle radici di ax^2+bx+c
→ trigonometrico

1° metodo <u>Esempio 1</u> $\int \sqrt{x^2+3x+2}\,dx$

$\int \frac{x^2+x^3+\sqrt{x^2+3x+2}}{(x^2+2)\sqrt{x^2+3x+2}}$

Sostituzione $\sqrt{x^2+3x+2} = x+t$ Ricavo x in funzione di t

$\cancel{x^2}+3x+2 = \cancel{x^2}+2xt+t^2$

In x è di primo grado

$x(3-2t) = t^2-2$

$x = \frac{t^2-2}{3-2t}$ $dx = \left(\frac{t^2-2}{3-2t}\right)' dt$

Sostituendo diventa $\int \underbrace{\left(\frac{t^2-2}{3-2t}+t\right)}_{x+t} \underbrace{\left(\frac{t^2-2}{3-2t}\right)'}_{\text{Faccio il conto ed è razionale in } t} dt$

<u>Esempio 2</u> $\int \sqrt{3x^2+2x+1}\,dx$

$\sqrt{3x^2+2x+1} = \sqrt{3}\,x+t$; $3\cancel{x^2}+2x+1 = 3\cancel{x^2}+2\sqrt{3}\,xt+t^2$

È di 1° grado in x

Fatto generale Se l'integrale contiene $\sqrt{ax^2+bx+c}$, la sostituzione razionalizzante è (una)

$$\boxed{\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a}\,x + t}$$

Funziona se $a > 0$.

2° metodo Esempio 3 $\int \sqrt{x^2+3x+2}\,dx$

$x^2+3x+2 = (x+1)(x+2)$

Scelgo a caso uno dei 2 fattori, diciamo $x+2$

Sostituzione: $\sqrt{x^2+3x+2} = t\,(x+2)$

Provo a ricavare x, facendo il quadrato:

$$(x+1)\cancel{(x+2)} = t^2\,(x+2)^{\cancel{2}}$$

Ancora una volta, è di 1° grado in x: $x+1 = t^2x + 2t^2$

$x(1-t^2) = 2t^2-1 \qquad x = \frac{2t^2-1}{1-t^2} \qquad dx = \left(\frac{2t^2-1}{1-t^2}\right)' dt$

Quindi

$$\int \sqrt{x^2+3x+2}\,dx = \int \underbrace{t}_{t}\,\underbrace{\left(\frac{2t^2-1}{1-t^2}+2\right)}_{(x+2)}\left(\frac{2t^2-1}{1-t^2}\right)' dt$$

e da qui si divide.

— o — o —

Fatto generale Se le radici di ax^2+bx+c sono λ e μ, allora una sostituzione che funziona è

$$\boxed{\sqrt{ax^2+bx+c} = t\,(x-\lambda)}$$

oppure $t\,(x-\mu)$

Funziona quando le radici ci sono,
cioè quando $\Delta > 0$

Tabellina

	$a>0$	$a<0$
$\Delta>0$	1° metodo 2° metodo	2° metodo
$\Delta<0$	1° metodo	?

Il caso con $\Delta<0$ e $a<0$: il polinomio è sempre <0, quindi la sua radice quadrata non ha senso, quindi non ci poniamo il problema della primitiva

$\boxed{\text{3° metodo}}$ Fatto generale: ogni polinomio di 2° grado si può scrivere in una delle seguenti 2 forme

$\alpha+(\beta x+\gamma)^2 \rightsquigarrow$ diventa $1+x^2$

$\alpha-(\beta x+\gamma)^2 \rightsquigarrow$ diventa $1-x^2$

Quindi basta saper fare $\int\sqrt{1+x^2}\,dx$ $\int\sqrt{1-x^2}\,dx$

$\int\sqrt{1-x^2}\,dx$ si può fare con il 2° metodo oppure con la sostituzione trigonometrica $x=\sin t$

$=\int\sqrt{1-\sin^2 t}\,\cos t\,dt=\int\cos^2 t\,dt$ e qui si fa

$\int\sqrt{1+x^2}\,dx$ si può fare con il 1° metodo oppure con la sostituzione $x=\sinh t$

$=\int\sqrt{1+\sinh^2 t}\,\cosh t\,dt=\int\cosh^2 t\,dt$ e qui si fa

→ per parti con grande ritorno
→ usando formula per $\cosh(2t)$
→ usando la definizione di $\cosh t$ in termini di e^t e e^{-t}

— o — o —

Caso ④ Per funzioni razionali di $\sin x$ e $\cos x$ è usare le formule parametriche della trigonometria

$$\boxed{\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}} \qquad \boxed{\sin x = \frac{2t}{1+t^2}}$$

dove $t = \tan \frac{x}{2}$, da cui $\frac{x}{2} = \arctan t \qquad x = 2\arctan t$

e quindi $\boxed{dx = \frac{2}{1+t^2}\,dt}$

Esempio 4 $\displaystyle\int \frac{1}{\sin x}\,dx = \int \underset{\substack{\uparrow \\ \text{uso} \\ \text{formula}}}{\frac{1+t^2}{2t}} \cdot \frac{2}{1+t^2}\,dt = \int \frac{1}{t}\,dt$

$$= \log|t| = \log\left|\tan \frac{x}{2}\right|$$

Ci sono anche altre strade ...

$$\int \frac{1}{\sin x}\,dx = \int \frac{\sin x}{\sin^2 x}\,dx = \int \frac{\sin x}{1-\cos^2 x}\,dx \qquad \begin{array}{l}\cos x = t \\ -\sin x\,dx = dt\end{array}$$

$= -\displaystyle\int \frac{dt}{1-t^2}$ e da qui si chiude facilmente

Fatto generale: allo stesso modo (senza passare dalle formule parametriche) si fanno

$$\boxed{\int \frac{1}{\sin^k x}\,dx} \qquad \boxed{\int \frac{1}{\cos^k x}\,dx}$$

Esempio 5 $\displaystyle\int \frac{1}{\cos^3 x}\,dx = \int \frac{\cos x}{\cos^4 x}\,dx = \int \frac{\cos x}{(1-\sin^2 x)^2}\,dx$

$y = \sin x$
$dy = \cos x\,dx$

$= \displaystyle\int \frac{dt}{(1-t^2)^2}$ ... e questo si fa scrivendo

$$\frac{1}{(1-t^2)^2} = \frac{A}{1-t} + \frac{B}{1+t} + \frac{d}{dt}\,\frac{Ct+D}{1-t^2} \quad \ldots$$

Esempio 6 $\int \arcsin x \, dx = \int \underset{f}{1} \cdot \underset{G}{\arcsin x} \, dx$

$$= \underset{F}{x} \, \underset{G}{\arcsin x} - \int \underset{F}{x} \, \underset{g}{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}} \, dx = x \arcsin x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \, dx$$

si può fare con il 2° o 3° metodo

$$= x \arcsin x + \sqrt{1-x^2}$$

(Derivare per verifica)

In alternativa

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \, dx \qquad y = 1-x^2 \qquad dy = -2x \, dx$$

$$= -\frac{1}{2} \int \frac{-2x \, dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{1}{2} \int \frac{dy}{\sqrt{y}} = -\sqrt{y} = -\sqrt{1-x^2}$$

Alternativa: $x = \sin t$ all'inizio $\quad dx = \cos t \, dt$

$\int \arcsin x \, dx = \int t \cdot \cos t \, dt$ e per parti si chiude

Esempio 7 $\int \frac{1}{\sin^3 t \cos^3 t} \, dt$

1° metodo: formule parametriche

2° metodo: Precorso $\frac{1}{\sin^3 t \cos^3 t} = \frac{8}{\sin^3(2t)}$

3° metodo $\frac{\sin t \cos t}{\sin^4 t \cos^4 t} = \frac{\sin t \cos t}{\sin^4 t \, (1-\sin^2 t)^2}$ $\quad y = \sin^2 t$

diventa $\frac{1}{2} \int \frac{dy}{y^2 (1-y)^2}$ e da qui si chiude.

4° modo Provare a moltiplicare per $\sin^3 t \cos t$ ...

— o — o —

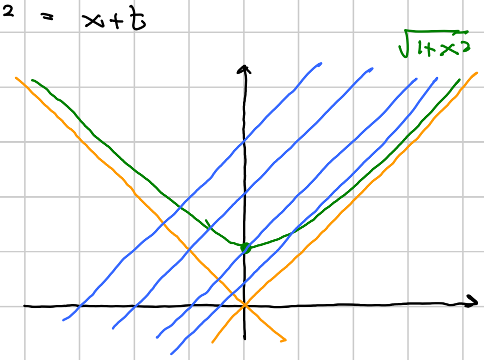
Aggiunto dopo video: provare a moltiplicare per $\cos^2 x + \sin^2 x$ e per $(\cos^2 x + \sin^2 x)^2$ (vedi Lez. 2011/12)

ANALISI 1 – LEZIONE 063

Titolo nota 09/12/2014

Interpretazione delle sostituzioni razionalizzanti

Esempio 1 $\int \sqrt{1+x^2}\, dx$ $\sqrt{1+x^2} = x+t$

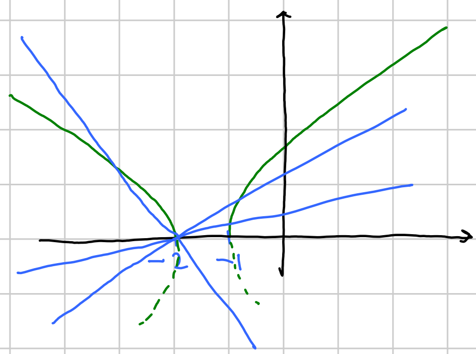


Graficamente cosa rappresentano?

$\sqrt{1+x^2}$ è un ramo di iperbole

$x+t$ è una famiglia di rette parallele ad uno degli asintoti. Ogni retta incontra l'iperbole in un p.to solo. Le coordinate di quel punto sono una funzione razionale di t.

Esempio 2 $\int \sqrt{x^2+3x+2}\, dx$ $\sqrt{x^2+3x+2} = t(x+2)$



$\sqrt{x^2+3x+2}$ è un'iperbole pure questa

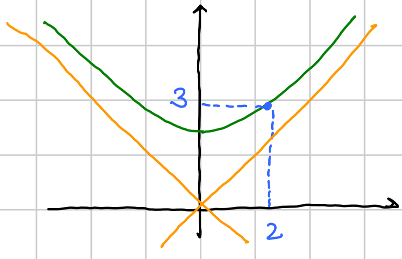
$t(x+2)$ è la famiglia di rette che passano per il p.to $(-2,0)$

Per ogni t, la retta ha con l'iperbole 2 intersezioni:

- una fissa in $(-2,0)$
- una variabile

Se io conosco una intersezione (sol. eq. di 2° grado) conosco per forza anche l'altra (conosco somma e prodotto delle radici) e per calcolarla non ho bisogno di radici, quindi è una funzione razionale del parametro

Esempio 3 $\int \sqrt{5+x^2}\, dx$



Metodo creativo $\sqrt{5+x^2} = \underbrace{3+t(x-2)}_{\text{fascio di rette per il p.to }(2,3)}$

Ricavo x : $5+x^2 = 9+t^2(x-2)^2+6t(x-2)$

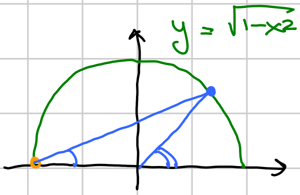
$$(x+2)\cancel{(x-2)} = t^2(x-2)^{\cancel{2}} + 6t\cancel{(x-2)}$$

È di 1° grado in x, quindi posso calcolare x e ottengo una funzione razionale di t. A quel punto anche y è una funzione razionale di t, dx pure e ho concluso.

— o — o —

Parametrizzazione di una curva. Data una curva nel piano (nel nostro caso il grafico dell'integranda), una parametrizzazione sono due funzioni $(x(t), y(t))$ definite per $t \in D \subseteq \mathbb{R}$ tali che

- per ogni $t \in D$ il p.to $(x(t), y(t))$ sta sulla curva
- ogni p.to della curva si scrive come $(x(t), y(t))$ per un qualche $t \in D$.



Esempio Come la posso parametrizzare?

1° modo: $(t, \sqrt{1-t^2})$ $t \in [-1,1]$

2° modo: $(\cos t, \sin t)$ $t \in [0,\pi]$

3° modo: considero la famiglia di rette per il p.to $(-1,0)$

$y = t(x+1)$. Vado ad intersecare:

$t(x+1) = \sqrt{1-x^2}$ $t^2(x+1)^{\cancel{2}} = \cancel{(1+x)}(1-x)$

$x(t^2+1) = 1-t^2$ $\boxed{x = \frac{1-t^2}{1+t^2}}$ ora

$y = t(x+1) = t\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}+1\right) = \boxed{\frac{2t}{1+t^2} = y}$

Un integrale con $\int \text{Raz}(\sin x, \cos x)$ lo posso portare in

$\int \text{Raz}(x, \sqrt{1-x^2})$ e a sua volta posso usare la parametrizzazione della circ. data dalla famiglia di rette per $(-1,0)$

— o — o —

Def. Una curva si dice razionale se ammette una parametrizzazione fatta da funzioni razionali.

Fatto generale: se il grafico di $f(x)$ è una curva razionale, allora c'è una sostituzione razionalizzante per

$$\int f(x)\,dx$$

— o — o — o —

Esercizio $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, C^1 Sia $F(x)$ la sua primitiva con $F(0)=0$

Supponiamo che $f(x) = o(x^{2014})$ per $x \to 0$.
Posso dire

① $f'(x) = o(x^{2013})$ per $x \to 0$? NO

② $F(x) = o(x^{2015})$ per $x \to 0$? SI

Per ① prendo $f(x) = x^{2015} \sin\left(\frac{1}{x^{30}}\right)$ $f(0)=0$

Se derivo perdo un bel po' di ordini di x $f'(x) = o(x^{2015-31})$

Per il ② finalmente ... Hôpital

$$\lim_{x\to 0} \frac{F(x)}{x^{2015}} \underset{\left[\frac{0}{0}\right]:\ \text{Hôp}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{2015\, x^{2014}} \underset{f(x) = o(x^{2014})}{=} 0 \quad \square$$

ANALISI 1 — LEZIONE 064

Titolo nota 11/12/2014

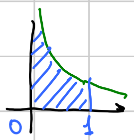
INTEGRALI IMPROPRI

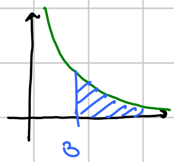
Integrali PROPRI $\int_E f(x)\,dx$ → E insieme limitato
→ f(x) limitata in E

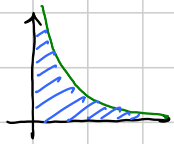
Integrali IMPROPRI: se manca uno o entrambi gli ingredienti

Esempi

$\int_0^1 \frac{1}{x^2}\,dx$ $\int_3^{+\infty} \frac{1}{x^3}\,dx$ $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx$







zona integr. limitata
f(x) NON limitata

f(x) limitata
zona non limitata

f(x) non limitata
zona non limitata

Integrale improprio MONOPROBLEMA

Sostanzialmente sono due casi

① f(x) limitata e zona di integrazione = semiretta $[a, +\infty)$ oppure $(-\infty, a]$

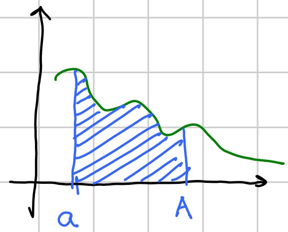
② zona di integrazione = intervallo $[a, b]$
f(x) non limitata nell' intorno di uno dei due estremi

Def. (caso ①) Voglio definire $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$

Suppongo che, per ogni $A \in (a, +\infty)$, si abbia che $f(x)$ è limitata in $[a, A]$.

Allora si pone

$$\boxed{\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{A\to+\infty} \underbrace{\int_a^{A} f(x)\,dx}_{\text{integrale proprio}}}$$



Def. (caso ②) Voglio definire $\int_a^{b} f(x)\,dx$, con $f(x)$ che è non limitata a destra di a.

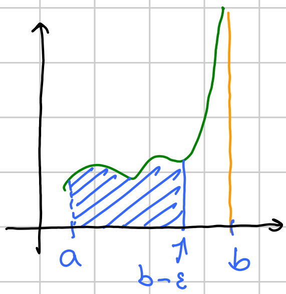
Suppongo che per ogni $\varepsilon \in (0, b-a)$ si abbia che $f(x)$ è limitata in $[a+\varepsilon, b]$.

Allora si pone

$$\boxed{\int_a^{b} f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to0^+} \underbrace{\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx}_{\text{integrale proprio}}}$$

Se il problema è in b la def. è analoga

$$\boxed{\int_a^{b} f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to0^+} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx}$$



Oss. L'integrale improprio è un limite, quindi ha 4 possibilità

→ essere un numero reale ℓ (si dice che l'int. converge ad ℓ)

→ essere $+\infty$ (l'int. impr. diverge a $+\infty$)

→ essere $-\infty$ (" " " $-\infty$)

→ non esistere (l'int. impr. è indeterminato)

Esempio 1 $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx = \lim_{A\to+\infty} \int_0^A e^{-x}\,dx$

$\displaystyle = \lim_{A\to+\infty} \left[-e^{-x}\right]_0^A$

$\displaystyle = \lim_{A\to+\infty} \left(-e^{-A}+1\right) = 1$

Esempio 2 $\displaystyle\int_0^2 \frac{1}{x}\,dx = \lim_{\varepsilon\to0^+} \int_\varepsilon^2 \frac{1}{x}\,dx$

$\displaystyle = \lim_{\varepsilon\to0^+} \left[\log x\right]_\varepsilon^2$

$\displaystyle = \lim_{\varepsilon\to0^+} \Big(\log 2 - \underbrace{\log\varepsilon}_{\to -\infty}\Big) = +\infty$

Esempio 3 $\displaystyle\int_{-\infty}^{-4} \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{A\to-\infty} \int_A^{-4} \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{A\to-\infty} \left[-\frac{1}{x}\right]_A^{-4}$

$\displaystyle = \lim_{A\to-\infty} \Big(\frac{1}{4} + \underbrace{\frac{1}{A}}_{\to 0}\Big) = \frac{1}{4}$

Esempio 4 $\displaystyle\int_0^{+\infty} \cos x\,dx = \lim_{A\to+\infty} \int_0^A \cos x\,dx$

$\displaystyle = \lim_{A\to+\infty} \left[\sin x\right]_0^A$

$\displaystyle = \lim_{A\to+\infty} \Big(\underbrace{\sin A}_{\text{non ha limite}} - \underbrace{\sin 0}_{=0}\Big)$

L'integrale improprio è indeterminato

Esempio 5 $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \lim_{A\to+\infty} \int_1^A \frac{1}{1+x^2}\,dx$

$\displaystyle = \lim_{A\to+\infty} \Big[\underbrace{\arctan A}_{\to \frac{\pi}{2}} - \underbrace{\arctan 1}_{=\frac{\pi}{4}}\Big] = \frac{\pi}{4}$

Cosa fare se c'è più di un problema

Si prova a spezzare il tutto in più integrali con un problema solo!

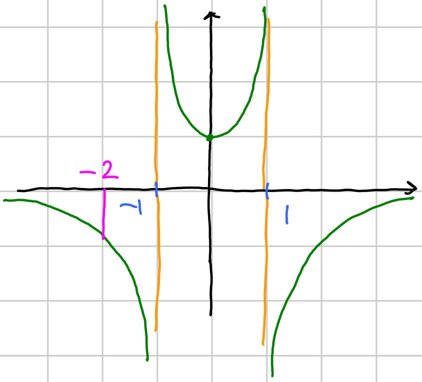
Esempio 1 $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx = \int_0^3 \frac{1}{x}\,dx + \int_3^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx$

hanno un probl. solo

Esempio 2 $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+x^2}\,dx + \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx$

Esempio 3 $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1-x^4}\,dx$

$$= \int_{-\infty}^{-2} \dots + \int_{-2}^{-1} + \int_{-1}^{0} \dots + \int_0^1 \dots + \int_1^7 \dots + \int_7^{+\infty} \dots$$



Dopo aver spezzato
- → studio separatamente i vari pezzi MONOPROBLEMA
- → deduco il comportamento globale sommando quello che è successo sui vari pezzi (aritmetica in $\overline{\mathbb{R}}$) con l'accordo che

> SE ALMENO UN PEZZO DIVERGE A $+\infty$ E ALMENO UN PEZZO DIVERGE A $-\infty$, ALLORA QUELLO GLOBALE SI DICHIARA INDETERMINATO

Esempio 4 $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \underbrace{\int_0^3 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx}_{2\sqrt{3}} + \underbrace{\int_3^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx}_{+\infty} = +\infty$

$$\int_0^3 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \left[2\sqrt{x}\right]_0^3 = 2\sqrt{3} \quad \left(= \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_\varepsilon^3 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+} (2\sqrt{3} - 2\sqrt{\varepsilon}) = 2\sqrt{3} \right)$$

$$\int_3^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{A\to+\infty} \int_3^A \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{A\to+\infty} (2\sqrt{A} - 2\sqrt{3}) = +\infty$$

Esempio classico

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^a}\,dx = \begin{cases} \nearrow \text{converge se } a > 1 \\ \searrow \text{diverge se } a \leq 1 \end{cases}$$

$$\int_0^{1} \frac{1}{x^a}\,dx = \begin{cases} \nearrow \text{converge se } a < 1 \\ \searrow \text{diverge se } a \geq 1 \end{cases}$$

$\boxed{\text{Dim.}}$ Caso $a \neq 1$ $\quad \int \frac{1}{x^a}\,dx = \frac{1}{1-a}\,\frac{1}{x^{a-1}}$

quindi

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^a}\,dx = \lim_{A\to+\infty} \int_1^{A} \frac{1}{x^a}\,dx = \lim_{A\to+\infty} \left[\frac{1}{1-a}\,\frac{1}{x^{a-1}}\right]_1^A$$

$$= \lim_{A\to+\infty} \frac{1}{1-a}\,\frac{1}{A^{a-1}} - \frac{1}{1-a}$$

se $a>1$ questo $\to 0 \rightsquigarrow$ resta $\frac{1}{a-1}$

se $a<1$ questo $\to +\infty \rightsquigarrow$ diventa $+\infty$

$$\int_0^{1} \frac{1}{x^a}\,dx = \lim_{\varepsilon\to0^+} \int_\varepsilon^{1} \frac{1}{x^a}\,dx = \lim_{\varepsilon\to0^+} \left[\frac{1}{1-a}\,\frac{1}{x^{a-1}}\right]_\varepsilon^1$$

$$= \lim_{\varepsilon\to0^+} \frac{1}{1-a} - \frac{1}{1-a}\,\frac{1}{\varepsilon^{a-1}}$$

se $a<1$ questo $\to 0 \rightsquigarrow$ resta $\frac{1}{1-a}$

se $a>1$ questo $\to +\infty \rightsquigarrow$ diventa $+\infty$

Per $a=1$, la primitiva è $\log x$ e questa provoca la divergenza sia con prob. a $+\infty$, sia con prob. a 0^+.

ANALISI 1 — LEZIONE 065

Titolo nota 11/12/2014

Esempio

$$\boxed{\int_2^{+\infty} \frac{1}{x \log^a x}\, dx = \begin{cases} \nearrow \text{converge} & \text{se } a > 1 \\ \searrow \text{diverge a } +\infty & \text{se } a \leq 1 \end{cases}}$$

Idea della dim. Si fa la primitiva, che risulta essere

$\log(\log x)$ se $a = 1$ $\qquad \dfrac{1}{1-a} \dfrac{1}{\log^{a-1} x}$ se $a \neq 1$

Oss. Sia $a < b$. Allora gli integrali impropri

$$\int_a^{+\infty} f(x)\, dx \quad \text{e} \quad \int_b^{+\infty} f(x)\, dx$$

(supposti con unico probl. a $+\infty$)

hanno lo stesso tipo di comportamento. Nel caso in cui convergano, vale la relazione

$$\int_a^{+\infty} f(x)\, dx = \int_a^b f(x)\, dx + \int_b^{+\infty} f(x)\, dx$$

Idea della dim.

$$\int_a^A f(x)\, dx = \underbrace{\boxed{\int_a^b f(x)\, dx}}_{\text{numero fisso}} + \int_b^A f(x)\, dx$$

I limiti per $A \to +\infty$ di LHS e RHS hanno quindi lo stesso comportamento.

— o — o —

Studiare un integrale improprio = stabilire il tipo di comportamento SENZA fare la primitiva.

CRITERI DI CONVERGENZA (per integrali monoproblema)

f(x) a segno costante vicino al problema

- Criterio del confronto
- Criterio del confronto asintotico → casi standard
  → casi limite

f(x) a segno variabile vicino al problema

- Criterio assoluta integrabilità

Criterio del confronto Siano $\int_E f(x)\,dx$ e $\int_E g(x)\,dx$

due integrali impropri monoproblema con lo stesso tipo di problema.
Supponiamo che

$$0 \leq f(x) \leq g(x) \qquad \forall x \in E$$

o per lo meno vicino al problema.

Allora valgono le seguenti implicazioni:

$$\int_E f(x)\,dx = +\infty \quad \Rightarrow \quad \int_E g(x)\,dx = +\infty$$

$$\int_E g(x)\,dx < +\infty \quad \Rightarrow \quad \int_E f(x)\,dx < +\infty$$

(converge) (converge)

Ogni altra implicazione è FALSA.

Oss. Se f(x) ha segno costante in E, allora $\int_E f(x)\,dx$ può solo convergere o divergere a $+\infty$

Dim. Confronto tra limiti (come per le serie)

Confronto asintotico $\quad \int_E f(x)\,dx \qquad \int_E g(x)\,dx$

monoproblema con lo stesso problema. Supponiamo $f(x) \geq 0$ e $g(x) > 0$ in E (o almeno vicino al problema).
Supponiamo che

$$\lim_{x \to \text{pbm}} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell \in (0, +\infty) \quad \begin{matrix} \neq 0 \\ \neq +\infty \end{matrix}$$

Allora i due integrali hanno lo stesso tipo di comportamento.
Nei casi limite ($\ell = 0$ oppure $\ell = +\infty$) vale solo metà della tesi, esattamente come con le serie.

Idea della dim. Stessa delle serie

Poiché $\displaystyle\lim_{x \to \text{pbm}} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell$, allora vicino al problema si avrà che

$$\frac{\ell}{2} \leq \frac{f(x)}{g(x)} \leq 2\ell$$

da cui $\quad \dfrac{\ell}{2}\, g(x) \leq f(x) \leq 2\ell\, g(x)$

e da qui si chiude per confronto semplice.
Se $\ell = 0$ oppure $\ell = +\infty$, allora la disuguaglianza è da una parte sola.

Assoluta integrabilità Per integrali monoproblema vale l'implicazione

$$\boxed{\int_E |f(x)|\,dx \text{ converge} \implies \int_E f(x)\,dx \text{ converge}}$$

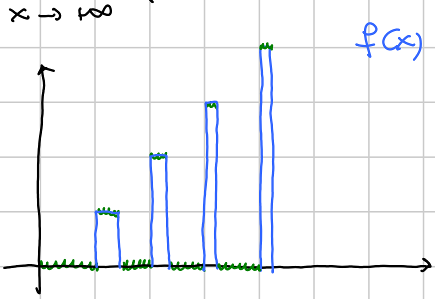
$$\int_E |f(x)|\,dx = +\infty \implies \text{BOH (restano aperte 4 opzioni)}$$

Achtung! Per gli integrali impropri non c'è la condizione necessaria come per le serie, cioè può accadere che

$$\int_0^{+\infty} f(x)\,dx \quad \text{converge}$$

ma non accade che $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$

L'esempio è qualcosa del tipo



$\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$ = somma aree rettangoli

Basta prendere altezza $= n$, base $= \frac{1}{n^3}$

Versione debole della condizione necessaria:

se $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$ converge $\Rightarrow$ non può essere che $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell \neq 0$

può essere che $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ N.E.

— o — o —

Esempio 1 $\int_0^{+\infty} \boxed{\frac{1}{x^3+\sqrt{x}}}\,dx$ Due pbm: $\int_0^5 \ldots + \int_5^{+\infty} \ldots$

f(x)

$\int_5^{+\infty} \frac{1}{x^3+\sqrt{x}}\,dx$ converge per C.A. con $\boxed{\frac{1}{x^3}}$ g(x)

$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3}{x^3+\sqrt{x}} = 1$, quindi $\int f(x)\,dx$ con pbm. a $+\infty$ si comporta come quello di g(x) con pbm. a $+\infty$, quindi converge

pbm

f(x)

$\int_0^5 \frac{1}{x^3+\sqrt{x}}\,dx$ converge per C.A. con $\boxed{\frac{1}{\sqrt{x}}}$ g(x)

$$\lim_{\substack{x\to 0^+ \\ \uparrow \\ \text{pbm}}} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{x}}{x^3+\sqrt{x}} = 1$$

Quindi $\int f(x)\,dx$ con pbm. a 0 si comporta come $\int g(x)\,dx$ con pbm a 0, quindi converge

<u>Esempio 2</u> $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sin x}\,dx$ OSS: $\sin x$ è ≥ 0 in $[0,1]$, quindi l'integranda è a segno costante. L'unico pbm. dell'integrale è in $x=0$

L'integrale diverge per confronto asintotico con $g(x) = \frac{1}{x}$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{\sin x} = 1$$ e quindi stesso comportamento

<u>Esempio 3</u> $$\int_0^{+\infty} \frac{x-\arctan x}{x^3}\,dx = \int_0^4 + \int_4^{+\infty}$$

$\displaystyle\int_4^{+\infty} \dots$ converge perchè $\quad 0 \leq \dfrac{x-\arctan x}{x^3} \leq \dfrac{x}{x^3} = \dfrac{1}{x^2}$

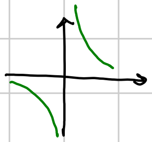
e quindi basta il confronto con $\frac{1}{x^2}$

$\displaystyle\int_0^4 \dots$ NON È NEMMENO UN INTEGRALE IMPROPRIO, perchè $f(x)$ è limitata in $(0,4]$ in quanto

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \frac{1}{3}$$

Dall'esistenza del limite alla limitatezza serve una dim.

<u>Esempio 4</u> $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{1}{x}\,dx = \Big[\log|x|\Big]_{-1}^1 = 0-0=0$ NO!!!!!!



$$\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx = +\infty, \int_{-1}^0 \frac{1}{x}\,dx = -\infty \Rightarrow \text{INDETERMINATO}$$

ANALISI 1 — LEZIONE 066

Titolo nota 15/12/2014

Integrali impropri

$$\int_0^1 \frac{1}{x^a}\,dx = \begin{cases} \nearrow \text{converge se } a<1 \\ \searrow +\infty \quad \text{se } a \geq 1 \end{cases}$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^a}\,dx = \begin{cases} \nearrow \text{converge se } a>1 \\ \searrow +\infty \quad \text{se } a \leq 1 \end{cases}$$

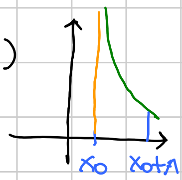
Oss. 1 Se cambio l'estremo 1 con un qualunque $A \in (0, +\infty)$ le cose non cambiano

Oss. 2 $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^a}\,dx = +\infty$ per ogni a

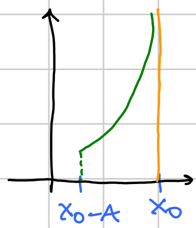
Cosa succede se il problema è in un p.to $x_0 \neq 0$?

Basta spostare il problema in 0 con un cambio di variabili!

$$\int_{x_0}^{x_0+A} \frac{1}{|x-x_0|^a}\,dx = \begin{cases} \nearrow \text{converge se } a<1 \\ \searrow \text{div. a } +\infty \text{ se } a \geq 1 \end{cases} \qquad (A>0)$$



$$\int_{x_0-A}^{x_0} \frac{1}{|x-x_0|^a}\,dx = \begin{cases} \nearrow \text{converge se } a<1 \\ \searrow +\infty \quad \text{se } a \geq 1 \end{cases}$$



Dim. Brutalmente: pongo $x-x_0=y$, quindi $dx=dy$

$x=x_0 \rightsquigarrow y=0$

$x=x_0+A \rightsquigarrow y=A$

$$\int_{x_0}^{x_0+A} \frac{1}{|x-x_0|^a}\,dx = \int_0^A \frac{1}{y^a}\,dy \quad \text{e quindi è fatta}$$

Domanda: posso usare il cambio di variabili?

Rigorosamente, uso la definizione

$$\int_{x_0}^{x_0+A} \frac{1}{|x-x_0|^a}\,dx \underset{\text{def.}}{=} \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{x_0+\varepsilon}^{x_0+A} \frac{1}{|x-x_0|^a}\,dx$$

cambio di variabili in integrale proprio

$$= \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{\varepsilon}^{A} \frac{1}{|y|^a}\,dy$$

$$\underset{\text{def.}}{=} \int_0^A \frac{1}{y^a}\,dy$$

— o — o —

<u>Esempio 1</u> $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x^4-1}}\,dx$

$\boxed{\text{Problema a } +\infty}$ Converge perchè $f(x) \sim \frac{1}{x^2}$. Rigorosamente dovrei fare C.A. con $g(x) = \frac{1}{x^2}$

$\boxed{\text{Problema in } x=1}$

$$\frac{1}{\sqrt{x^4-1}} = \frac{1}{\sqrt{(x-1)(x^3+x^2+x+1)}}$$

$$= \boxed{\frac{1}{\sqrt{x-1}}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^3+x^2+x+1}}$$

colpevole dell'improprietà dell'integrale

nessun problema in $x = 1$

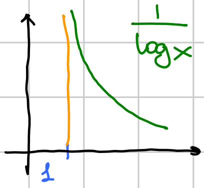
Di conseguenza, si comporta come $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x-1}}\,dx$ con problema in 1, quindi converge perchè $a = \frac{1}{2} < 1$.

Rigorosamente: C.A. con $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x-1}}$. Mi riduce a fare

$$\lim_{\underset{\text{problema}}{x\to 1^+}} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 1^+} \frac{1}{\sqrt{x^3+x^2+x+1}} = \frac{1}{2} \quad \begin{matrix}\neq 0\\ \neq +\infty\end{matrix}$$

Quindi i 2 integrali hanno stesso comportamento.

Esempio 2 $\displaystyle\int_1^3 \frac{1}{\log x}\,dx$ Pongo $y = x-1$



$$= \int_0^2 \frac{1}{\log(1+y)}\,dy = +\infty$$

Diverge per C.A. con $\frac{1}{y}$ $\quad (\log(1+y) \sim y)$

Dovrei fare $\displaystyle\lim_{y\to 0^+} \frac{f(y)}{g(y)} = \lim_{y\to 0^+} \frac{y}{\log(1+y)} = 1$ $\quad \neq 0,\ \neq +\infty$

— o — o —

Esempio 3 $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x^2)}{x^2\sqrt{x}}\,dx$

$\boxed{\text{Problema in } x=0}$ $\quad \dfrac{\sin(x^2)}{x^2\sqrt{x}} \sim \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ quindi converge

Occhio: per usare il C.A. mi serve che $f(x) > 0$ vicino al problema, il che in questo caso è vero.

$\boxed{\text{Problema a } +\infty}$ L'integranda non è a segno costante, quindi non pensare nemmeno a fare

$$\frac{\sin(x^2)}{x^2\sqrt{x}} \le \frac{1}{x^2\sqrt{x}}, \quad \text{quindi converge} \qquad \text{NO!!!}$$

Bisogna passare attraverso l'assoluta integrabilità

$\displaystyle\int \frac{1}{x^2\sqrt{x}}\,dx$ con problema a $+\infty$ converge

$\Downarrow$ ← confronto tra integrande ≥ 0

$\displaystyle\int \frac{|\sin(x^2)|}{x^2\sqrt{x}}\,dx$ con problema a $+\infty$ converge

$\Downarrow$ ← Assoluta integrabilità

$\displaystyle\int \frac{\sin(x^2)}{x^2\sqrt{x}}\,dx$ con problema a $+\infty$ converge

Esempio 4 $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^4+2}\,dx$ si comporta come $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^4}\,dx$ quindi diverge

NO!! Il confronto vale solo per l'integrale con problema a $+\infty$

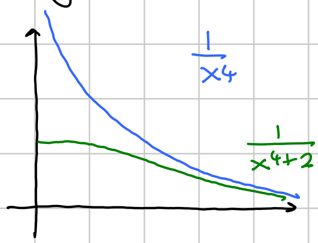
$\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^4+2}\,dx$ ha unico pbm. a $+\infty$, quindi si comporta come

$\displaystyle\int \frac{1}{x^4}\,dx$ con unico pbm. a $+\infty$, quindi converge

L'approx. $\displaystyle\frac{1}{x^4+2} \sim \frac{1}{x^4}$

è "buona" per $x \to +\infty$,

ma pessima per $x \to 0^+$.



— o — o —

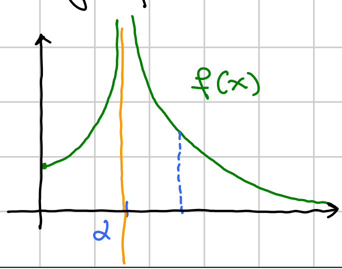
Esempio 5 $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{|x^7+3x^4-2|}}\,dx$

Sicuramente c'è un pbm. a $+\infty$, ma anche un altro (almeno) prima. Infatti, posto $g(x) = x^7+3x^4-2$, si ha $g(0) = -2$ e $g(x) \to +\infty$ per $x \to +\infty$, quindi c'è almeno uno zero in mezzo.

Ora $g'(x) = 7x^6 + 12x^3 \geq 0$ per $x \geq 0$ con annullamento solo per $x = 0$, quindi c'è un unico $\alpha > 0$ tale che $g(\alpha) = 0$. Una formula per α non c'è.

L'integrale va scomposto in 3 pezzi: $\displaystyle\int_0^{\alpha} \dots + \int_{\alpha}^{\alpha+1} \dots + \int_{\alpha+1}^{+\infty} \dots$

L'ultimo converge per C.A. con $\displaystyle\frac{1}{x^{7/2}}$ (il pbm. è a $+\infty$)



Ora $f(x) \sim \frac{1}{\sqrt{x-\alpha}}$ per $x \to \alpha^+$. Se fosse così, avrei che i primi due integrali convergono entrambi.

Rigorosamente: devo fare il C.A. con $\frac{1}{\sqrt{x-\alpha}}$, cioè calcolare

$$\lim_{x\to\alpha^+} f(x)\cdot\sqrt{x-\alpha} = \lim_{x\to\alpha^+} \sqrt{\frac{x-\alpha}{x^7+3x^4-2}}$$

non metto $|\cdot|$ perché $g(x) > 0$ per $x > \alpha$

Il limite dentro la radice è una forma del tipo $\frac{0}{0}$, quindi si può calcolare con De L'Hôpital:

$$\lim_{x\to\alpha^+} \frac{x-\alpha}{x^7+3x^4+2} = \lim_{x\to\alpha^+} \frac{1}{7x^6+12x^3} = \frac{1}{7\alpha^6+12\alpha^3} \quad \begin{matrix} \neq 0 \\ \neq +\infty \end{matrix}$$

e quindi gli integrali si comportano allo stesso modo.

— o — o —

<u>Fatto generale</u>: se $g(\alpha) = 0$ e $g'(\alpha) \neq 0$, allora

$$\boxed{g(\alpha+h) = g'(\alpha)\cdot h + o(h)}$$

questo è quello che abbiamo usato

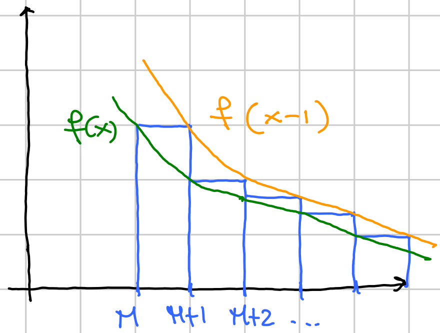
— o — o —

ANALISI 1 – LEZIONE 067

Titolo nota 15/12/2014

CONFRONTO SERIE - INTEGRALI (Gli integrali aiutano le serie)

Sia $M \in \mathbb{N}$, sia $f : [M, +\infty) \to \mathbb{R}$ una funzione debolmente decrescente con $f(x) \to 0$ per $x \to +\infty$.
Allora



$$\boxed{\int_M^{+\infty} f(x)\,dx \le \sum_{n=M}^{+\infty} f(n) \le f(M) + \int_M^{+\infty} f(x)\,dx}$$

Infatti nel disegno:
- la serie è la somma delle aree dei rettangoli
- l'integrale a sx è l'area sotto il grafico di $f(x)$
- a dx c'è l'area del primo rettangolo più l'area sotto il grafico di $f(x-1)$ tra $M+1$ e $+\infty$.

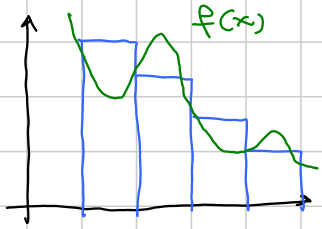
$$\int_{M+1}^{+\infty} f(x-1)\,dx \underset{x-1=y}{=} \int_M^{+\infty} f(y)\,dy$$

Data per buona la disuguaglianza, concludiamo che

$$\boxed{\sum_{n=M}^{+\infty} f(n) \text{ converge} \iff \int_M^{+\infty} f(x)\,dx \text{ converge}}$$

Ipotesi: $f : [M, +\infty) \to \mathbb{R}$
$f(x) \ge 0$ per ogni $x \ge M$
$f(x)$ debolmente decrescente

Oss. Se salta la debole decrescenza, non posso confrontare le aree



$\boxed{\text{Dim Disug.} \Rightarrow \text{confronto serie - int}}$

- Se l'integrale converge, guardo la disug. di dx
- Se l'integrale diverge, guardo la disug. di sx.

— o — o —

Per dimostrare per bene la disuguaglianza, dovrei definire la funzione $g(x)$ costante a tratti

$$g(x) = f(n) \qquad \forall x \in [n, n+1)$$

e la funzione

$$R(x) = \begin{cases} f(M) & \text{per } x \in [M, M+1) \\ f(x-1) & \text{per } x \geq M+1 \end{cases}$$

Dovrei poi dimostrare che

$$f(x) \leq g(x) \leq R(x) \qquad \forall x \geq M$$

cosa che segue facilmente dalla debole decrescenza di $f(x)$.
Infine osservare che

$$\int_M^{+\infty} f(x)\,dx \leq \int_M^{+\infty} g(x)\,dx \leq \int_M^{+\infty} R(x)\,dx$$

e osservare che i 3 termini sono esattamente i 3 termini che compaiono nella disuguaglianza iniziale

— o — o —

Applicazione classica

(1) $f(x) = \frac{1}{x^a}$ con $M = 1$. Questa verifica le hp, quindi

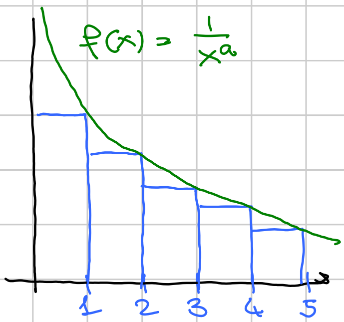
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a} \text{ converge } \underset{\text{serie - int.}}{\Longleftrightarrow} \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^a}\,dx \text{ conv. } \underset{\text{Dim. con la primitiva}}{\Longleftrightarrow} a > 1$$

(2) $f(x) = \frac{1}{x \log^a x}$ con $M = 2$. Conclusioni come sopra.

Esempio 1 Stimare le somme parziali per le serie armoniche generalizzate

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^a} \qquad \text{con } a > 1$$

Per $a > 1$ sappiamo che S_n è limitata superiormente. Da che cosa?



Considero $f(x) = \frac{1}{x^a}$. Allora

$$S_n \le \underbrace{1}_{\text{primo rettangolo}} + \underbrace{\int_1^n \frac{1}{x^a}\,dx}_{\text{rettangoli da 1 a } n}$$

da cui
$$S_n \le 1 + \left[\frac{1}{1-a}\,\frac{1}{x^{a-1}}\right]_1^n = 1 + \frac{1}{1-a}\,\frac{1}{n^{a-1}} - \frac{1}{1-a}$$
$$= \frac{a}{a-1} + \frac{1}{1-a}\,\frac{1}{n^{a-1}}$$

$$\boxed{S_n \le \frac{a}{a-1} - \frac{1}{a-1}\,\frac{1}{n^{a-1}} \qquad \forall n \ge 1}$$

Provare a vedere che succede a dim. per induzione

Esempio 2 Per $a \leq 1$, si può stimare come cresce la somma parziale della serie armonica generalizzata, per esempio

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \qquad S_n \to +\infty, \text{ ma come?}$$

Ora sappiamo che $S_n \sim 2\sqrt{n}$.
Basta fare confronto serie - integrali con $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$

Esempio 3 $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n}\right)$

Detto meglio, posto $a_n = \displaystyle\sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k}$, calcolare $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} a_k$

Sotto - esercizio: dimostrare che il limite esiste, ma senza calcolarlo, usando limitatezza + monotonia.

Brutal mode: $\displaystyle\sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k} \sim \int_n^{2n} \frac{1}{x}\,dx = \log(2n) - \log n = \log 2$

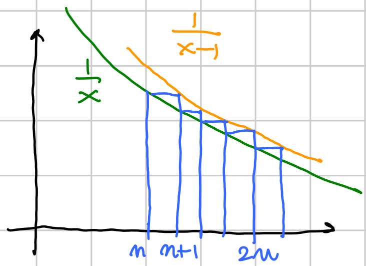
Rigorosamente:

$$\int_n^{2n+1} \frac{1}{x}\,dx \leq a_n \leq \int_n^{2n+1} \frac{1}{x-1}\,dx$$

$$\int_n^{2n+1} \frac{1}{x}\,dx = \log(2n+1) - \log n = \log\left(\frac{2n+1}{n}\right) \to \log 2$$

$$a_n \to \log 2$$

$$\int_n^{2n+1} \frac{1}{x-1}\,dx = \log(2n) - \log(n-1) = \log\left(\frac{2n}{n-1}\right) \to \log 2$$



Esempio 4 $a_n = \displaystyle\sum_{k=n}^{3n} \arctan \frac{1}{k}$

Ultra-brutal mode: $a_n \sim \displaystyle\sum_{k=n}^{3n} \frac{1}{k} \sim \int_n^{3n} \frac{1}{x}\,dx \sim \log 3$

La disuguaglianza facile è

$$a_n \le \sum_{k=n}^{3n} \frac{1}{k}$$

← si stima come prima con l'integrale

uso $\arctan x \le x$

Serve una disuguaglianza dall'altra parte

$$\arctan x \ge x - \frac{1}{3} x^3 \qquad \forall x > 0$$

si dimostra con lo studio di funzioni

$$\arctan \frac{1}{k} \ge \frac{1}{k} - \frac{1}{3} \frac{1}{k^3}$$

$$a_n \ge \sum_{k=n}^{3n} \frac{1}{k} - \frac{1}{3} \sum_{k=n}^{3n} \frac{1}{k^3}$$

Concludendo

$$\underbrace{\boxed{\sum_{k=n}^{3n} \frac{1}{k}}}_{\downarrow \, \log 3} - \frac{1}{3} \underbrace{\boxed{\sum_{k=n}^{3n} \frac{1}{k^3}}}_{\downarrow \, 0} \le \underbrace{a_n}_{\downarrow \, \log 3} \le \underbrace{\boxed{\sum_{k=n}^{3n} \frac{1}{k}}}_{\downarrow \, \log 3}$$

per "facile" confronto

—o —o —

<u>Fatto generale</u>

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{2^n}$$

Se voglio calcolare il valore approssimato:

→ sommo un po' di termini a mano

→ stimo l'errore, cioè la somma dei restanti termini, con un opportuno confronto serie-integrali

ANALISI 1 — LEZIONE 068

Titolo nota 16/12/2014

INTEGRALI OSCILLANTI

Esempi classici $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$ $\displaystyle\int_0^{+\infty} \cos(x^2)\,dx$ $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin(x^2)\,dx$

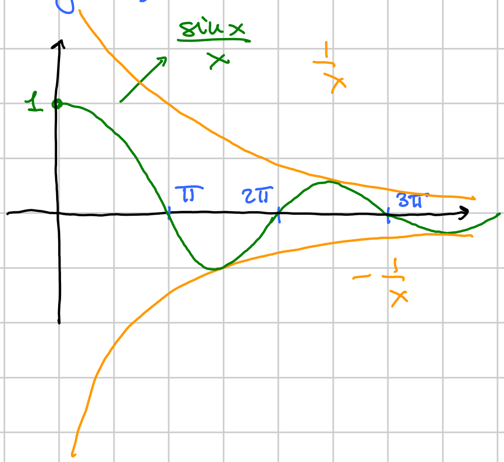
$\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x}\,dx$ $\displaystyle\int_0^{+\infty} |\cos(x^2)|\,dx$ $\displaystyle\int_0^{+\infty} |\sin(x^2)|\,dx$

Metodi → Trucco dell' integrazione per parti

→ Metodo dei triangolini (o dei rettangolini)

(le serie aiutano gli integrali)

Esempio 1 $\displaystyle\int_0^{+\infty} \underbrace{\boxed{\frac{\sin x}{x}}}_{f(x)}\,dx$



Prima osservazione: l'unico pbm. è a $+\infty$ perché vicino a 0 la funzione è limitata

L'assoluta convergenza non fornisce risultati immediati

$$\frac{|\sin x|}{x} \le \frac{1}{x} \qquad \int \frac{1}{x}\,dx \text{ con pbm. a } +\infty \text{ diverge} \Rightarrow \text{BOH}$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx = \underbrace{\int_0^{7} \frac{\sin x}{x}\,dx}_{\text{numero (integr. proprio)}} + \int_7^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$$

↑ ora studio questo

Studio solo il secondo

$$\int_7^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx = \lim_{A\to+\infty} \int_7^A \underset{f}{\sin x}\cdot \underset{G}{\frac{1}{x}}\,dx$$

$$= \lim_{A\to+\infty}\left(\left[\underset{F\ G}{\frac{-\cos x}{x}}\right]_7^A - \int_7^A \underset{F}{(-\cos x)}\,\underset{g}{\left(-\frac{1}{x^2}\right)}dx \right)$$

$$= \lim_{A\to+\infty}\left(\underbrace{-\frac{\cos A}{A}}_{\downarrow\ 0} + \frac{\cos 7}{7} - \int_7^A \frac{\cos x}{x^2}\,dx\right)$$

$$= \frac{\cos 7}{7} - \int_7^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2}\,dx$$

Se dimostro che converge l'ultimo, ho dimostrato la convergenza di quello che volevo. Per questo uso l'assoluta integrabilità.
Osservo che

$$\frac{|\cos x|}{x^2} \le \frac{1}{x^2} \qquad \forall\, x \ge 7$$

$$\int_7^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx \text{ converge} \underset{\substack{\uparrow\\ \text{confronto fra int.}\\ \text{impropri con integranda}\\ \ge 0}}{\Longrightarrow} \int_7^{+\infty} \frac{|\cos x|}{x^2}\,dx \text{ converge} \underset{\substack{\uparrow\\ \text{assoluta}\\ \text{integrabilità}}}{\Longrightarrow} \int_7^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2}\,dx \text{ conv.}$$

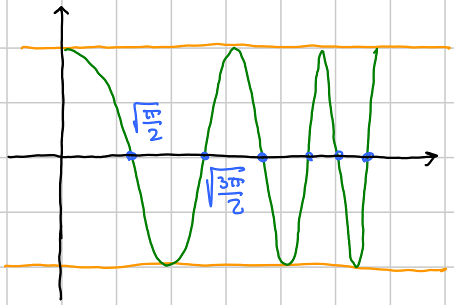
<u>Più in generale</u> Allo stesso modo si dimostra che

$$\int_{10}^{+\infty} \frac{\sin x}{x^a}\,dx \quad \text{converge per ogni } a>0 \qquad (\text{occhio al probl. in } x=0)$$

$$\int_a^{+\infty} \frac{\cos x}{x}\,dx \quad \text{converge per ogni } a>0$$

occhio che $\int_0^1 \frac{\cos x}{x}\,dx$ diverge banalmente perché $\sim \frac{1}{x}$

Esempio 2 $\displaystyle\int_0^{+\infty} \cos(x^2)\,dx$



Anche qui

$$\int_0^{+\infty} \cos(x^2)\,dx = \underbrace{\int_0^{7} \ldots}_{\text{numero}} + \int_7^{+\infty} \ldots$$

da studiare

$$\int_7^{+\infty} \cos(x^2)\,dx = \lim_{A\to+\infty} \int_7^{A} \cos(x^2)\,dx = \lim_{A\to+\infty} \int_7^{A} \underbrace{\frac{1}{2x}}_{G} \cdot \underbrace{2x\cos(x^2)}_{f}\,dx$$

$$= \lim_{A\to+\infty} \left\{ \left[\frac{\sin(x^2)}{2x} \right]_7^A - \int_7^A \sin(x^2) \left(-\frac{1}{2x^2}\right) dx \right\}$$

G F F

$$= \lim_{A\to+\infty} \left\{ \underbrace{\frac{\sin A^2}{2A}}_{\to 0} - \frac{\sin(49)}{14} + \frac{1}{2}\int_7^A \frac{\sin(x^2)}{x^2}\,dx \right\}$$

$$= -\frac{\sin 49}{14} + \frac{1}{2}\int_7^{+\infty} \frac{\sin(x^2)}{x^2}\,dx$$

$\downarrow$ Numero

$\downarrow$ Numero perché l'integrale converge assolutamente.

Allo stesso modo si ottiene

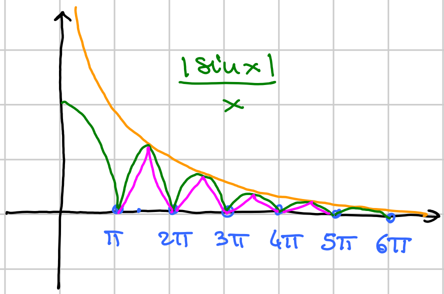
$$\int_0^{+\infty} \cos(x^a)\,dx \quad e \quad \int_0^{+\infty} \sin(x^a)\,dx \quad \text{convergono } \forall a>1$$

(provare a vedere cosa bisogna aggiungere davanti)

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x^a)}{x}\,dx \quad \text{converge per ogni } a>0$$

— o — o —

Esempio 3 $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x}\,dx$



Piazzo sotto il grafico dei triangolini T_n che hanno

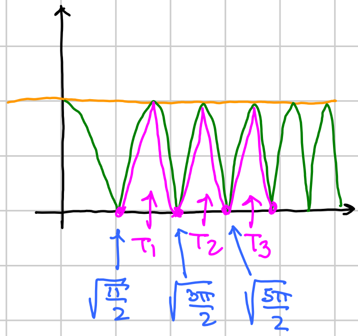
- base $[n\pi, (n+1)\pi]$
- vertice che si proietta sul centro della base, quindi in $f\left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right) = \dfrac{\overset{|\sin|}{1}}{n\pi + \frac{\pi}{2}}$

Per ragioni geometriche si ha

$$\int_0^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x}\,dx \geq \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\text{Area}(T_n)}_{\frac{1}{2}\text{base}\cdot\text{altezza}} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\pi}_{\text{base}}\ \underbrace{\frac{1}{n\pi + \frac{\pi}{2}}}_{\text{altezza}}$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n + \frac{1}{2}} = +\infty$$

Esempio 4 $\displaystyle\int_0^{+\infty} |\cos(x^2)|\,dx$



Ora i triangolini hanno

- altezza $= 1$
- base di $T_n = \left(\sqrt{\frac{(2n-1)\pi}{2}}, \sqrt{\frac{(2n+1)\pi}{2}}\right)$

Quindi come prima

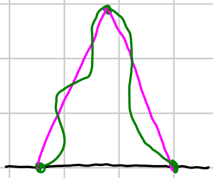
$$\int_0^{+\infty} |\cos(x^2)|\,dx \geq \sum_{n=1}^{\infty} \text{Area}(T_n) = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\left(\sqrt{\frac{(2n+1)\pi}{2}} - \sqrt{\frac{(2n-1)\pi}{2}}\right)}_{\text{lungh. base}}$$

$$\sqrt{\ldots} - \sqrt{\ldots} = \frac{\pi}{\sqrt{\ldots} + \sqrt{\ldots}} \sim \frac{\pi}{2\sqrt{n}}$$ e quindi la serie diverge

In alternativa: la serie è telescopica e la somma parziale n-esima è

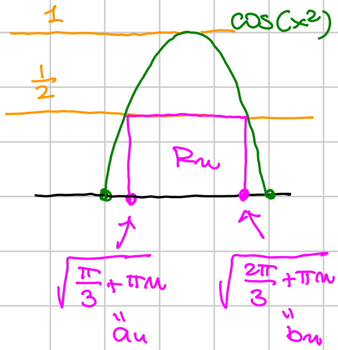
$$S_n = \sqrt{\frac{(2n+1)\pi}{2}} - \sqrt{\frac{\pi}{2}} \to +\infty$$

Osservazione Non è così ovvio che il Δ sta sotto la funzione.



Come rimediare?

1° modo: dimostrarlo per bene con studio di funzione



2° modo: piazzare sotto un rettangolino

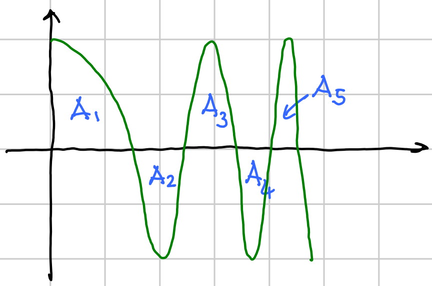
$$|\cos(x^2)| = \frac{1}{2} \iff x^2 = \begin{cases} \nearrow \frac{\pi}{3} + \pi n \\ \searrow \frac{2\pi}{3} + \pi n \end{cases}$$

Ora $$\sum_{n\geq 1}^{\infty} \text{Area}(R_n) = \sum_{n\geq 1}^{\infty} \underbrace{(b_n - a_n)}_{\sim \frac{1}{\sqrt{n}}} = +\infty$$

— o — o —

Oss. $\int_0^{+\infty} \cos(x^2)\,dx$ converge $\qquad \int_0^{+\infty} |\cos(x^2)|\,dx = +\infty$

esempio in cui l'integrale converge, ma $f(x) \not\to 0$ all'∞



$$\int_0^{+\infty} \cos(x^2)\,dx = \underbrace{A_1 - A_2 + A_3 - A_4 + A_5 \dots}_{\text{compensazione "leibnitziana"}}$$

$$\int_0^{+\infty} |\cos(x^2)|\,dx = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + \dots$$

— o — o —

ANALISI 1 — LEZIONE 069

Titolo nota 16/12/2014

Fatto generale: Consideriamo un integrale del tipo $\int_a^{+\infty} f(x)\,g(x)\,dx$

Supponiamo che ① la primitiva $F(x)$ di $f(x)$ è limitata, cioè $\exists M \in \mathbb{R}$ t.c. $|F(x)| \leq M \quad \forall x \geq a$

② $g(x)$ debolmente decrescente, C^1 e $g(x) \to 0$ per $x \to +\infty$

Allora l'integrale improprio converge

$\boxed{\text{Dim.}}$ $$\int_a^{+\infty} f(x)\,g(x)\,dx = \lim_{A\to+\infty} \int_a^A f(x)\,g(x)\,dx \quad \text{(per parti)}$$

$$= \lim_{A\to+\infty} \left\{ \Big[F(x)\,g(x)\Big]_a^A - \int_a^A F(x)\,g'(x)\,dx \right\}$$

$$= \lim_{A\to+\infty} \underbrace{F(A)\,g(A)}_{\to 0} - \underbrace{F(a)\,g(a)}_{\text{numero}} - \underbrace{\int_a^A F(x)\,g'(x)\,dx}_{\text{Questo converge assolutamente}}$$

poiché $|F(A)\,g(A)| \leq M\,g(A) \to 0$

$$|F(x)\,g'(x)| \leq M\,|g'(x)|\,dx$$

Ora $$\int_a^A M\,|g'(x)|\,dx = M \int_a^A |g'(x)|\,dx = -M \int_a^A g'(x)\,dx$$

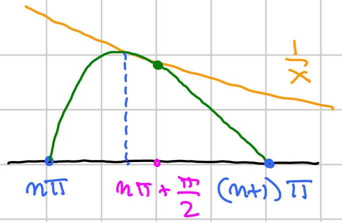
$g'(x) \leq 0$ essendo deb. decr.

$$= -M\,(g(A) - g(a)) \to M\,g(a)$$

($g(A) \to 0$)

$\int_a^{+\infty} M\,|g'(x)|\,dx$ conv. $\Rightarrow \int_a^{+\infty} |F(x)\,g'(x)|\,dx$ conv. $\Rightarrow \int_a^{+\infty} F(x)\,g'(x)\,dx$ conv.

<u>Oss.</u> $f(x) = \dfrac{|\sin x|}{x}$



Il contatto con $\frac{1}{x}$ avviene nel p.to centrale (perché $|\sin x| = 1$).
Il p.to di max è un po' prima (si vede studiando la derivata).

Fare i rettangolini vuol dire prendere l'intervallo dove $|\sin x| \geq \frac{1}{2}$

— o — o —

<u>Osservazione</u> È possibile calcolare il valore di questi integrali:

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \qquad \text{integrale di GAUSS}$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2} \qquad \text{integrale di DIRICHLET}$$

$$\int_0^{+\infty} \cos(x^2)\,dx = \int_0^{+\infty} \sin(x^2)\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{8}} \qquad \text{integrale di FRESNEL}$$

Perché il 1° converge? $e^{-x^2} \leq e^{-x}$ per ogni $x \geq 1$, quindi

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \underbrace{\int_0^1 \ldots}_{\text{numero}} + \int_1^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$$

$$\leq \int_1^{+\infty} e^{-x}\,dx$$ e questo si calcola con la primitiva

<u>Esercizio</u> Dato $a > 0$, calcolare $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-ax^2}\,dx$

Se potessi fare il cambio di variabili $\displaystyle = \int_0^{+\infty} e^{-(\sqrt{a}\,x)^2}\,dx$

$\sqrt{a}\,x = y \rightsquigarrow \sqrt{a}\,dx = dy$ $\displaystyle = \int_0^{+\infty} e^{-y^2} \frac{1}{\sqrt{a}}\,dy = \frac{1}{\sqrt{a}} \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

Per giustificarlo rigorosamente faccio il cambio in $\int_0^A \ldots$ e poi passo al limite per $A \to +\infty$.

$\boxed{\text{ULTRA-BRUTAL MODE}}$ Metto $a = i$

$$\int_0^{+\infty} e^{-ix^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{1}{\sqrt{i}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\sqrt{-i} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\shortparallel$$

$$\int_0^{+\infty} \cos(x^2)\,dx - i\int_0^{+\infty} \sin(x^2)\,dx$$

Uguagliando parti reali e immaginarie abbiamo gli integrali di Fresnel.

— o — o —

$\boxed{\text{LEMMA DI SOMMAZIONE PARZIALE (ABEL)}}$

Siano f_n e g_n due successioni. Allora per ogni $m \leq n$ si ha

$$\boxed{\sum_{k=m}^{n} f_k(g_{k+1}-g_k) = f_{n+1}g_{n+1} - f_m g_m - \sum_{k=m}^{n} g_{k+1}(f_{k+1}-f_k)}$$

$$\int f g' \qquad [fg]_m^n \qquad -\int g f'$$

$\boxed{\text{Dim 1}}$ (shift degli indici nella prima sommatoria)

$$\sum_{k=m}^{n} f_k(g_{k+1}-g_k) = \sum_{k=m}^{n} f_k g_{k+1} - \sum_{k=m}^{n} f_k g_k$$

SHIFT degli indici

$$= \sum_{k=m}^{n} f_k g_{k+1} - \sum_{k=m-1}^{n-1} f_{k+1} g_{k+1}$$

$$= \sum_{k=m}^{n-1} f_k g_{k+1} + f_n g_{n+1} - f_m g_m - \sum_{k=m}^{n-1} f_{k+1} g_{k+1}$$

$$= \sum_{k=m}^{n-1} g_{k+1}(f_k - f_{k+1}) + f_n g_{n+1} - f_m g_m$$

$$= \sum_{k=m}^{n} g_{k+1}(f_k - f_{k+1}) - \cancel{g_{n+1} f_n} + g_{n+1} f_{n+1} + \cancel{f_n g_{n+1}} - f_m g_m$$

$= \text{RHS}.$

$\boxed{\text{Dim 2}}$ (Stessa idea della dim. dell'integrazione per parti)

$$f_{n+1}\, g_{n+1} - f_m\, g_m = \underbrace{\sum_{k=m}^{n}}_{\text{somma telescopica}} \underbrace{(f_{k+1}\, g_{k+1} - f_k\, g_k)}_{\text{derivata del prodotto}}$$

$$= \sum_{k=m}^{n} (f_{k+1}\, g_{k+1} \underbrace{- f_k\, g_{k+1} + f_k\, g_{k+1}} - f_k\, g_k)$$

$$= \sum_{k=m}^{n} g_{k+1}\,(f_{k+1} - f_k) + \sum_{k=m}^{n} f_k\,(g_{k+1} - g_k).$$

Riorganizzando si ottiene la tesi.

— o — o —

Ultima riscrittura: shift di -1 sugli indici di g

$$\boxed{\sum_{k=m}^{n} f_k\,(g_k - g_{k-1}) = f_{n+1}\, g_n - f_m\, g_{m-1} - \sum_{k=m}^{n} g_k\,(f_{k+1} - f_k)}$$

Fatto generale Consideriamo una serie del tipo $\sum_{k=m}^{\infty} a_k b_k$

Supponiamo che

- A_k = somme parziali di $\sum a_k$ sono limitate
- b_k debolmente decrescente e $b_k \to 0$

Allora

$$\sum_{k=m}^{\infty} a_k b_k \quad \text{converge}$$

$\boxed{\text{Dim.}}$ $\displaystyle\sum_{k=m}^{\infty} a_k b_k = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=m}^{n} a_k b_k = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=m}^{n} b_k\,(A_k - A_{k-1})$

$$= \lim_{n\to+\infty} \Big\{ \underset{\downarrow\,0}{b_{n+1} A_n} - \underset{\downarrow\,\text{numero}}{b_m A_{m-1}} - \underbrace{\sum_{k=m}^{n} A_k\,(b_{k+1} - b_k)}_{\text{converge assolutamente}} \Big\}$$

$$-\sum |A_k|\cdot|b_{k+1}-b_k| \leq -M\sum |b_{k+1}-b_k| = M\underbrace{\sum b_k - b_{k+1}}_{\text{telescopica}}$$

<u>Esempio classico</u> $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n}$

Uso il lemma precedente con $b_n = \frac{1}{n}$ (decresc. e $\to 0$)
e $a_n = \sin n$

Devo verificare che $A_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sin k$ è una succ. limitata

<u>1° modo</u>: esiste una formula esplicita per A_n

Fatto generale

$$\sum_{k=1}^{n} e^{ikx} = \sum_{k=1}^{n} \cos(kx) + i\sum_{k=1}^{n} \sin(kx)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (e^{ix})^k \leftarrow \text{geometrica!}$$

$$= \frac{(e^{ix})^{n+1}-1}{e^{ix}-1} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{non c'è il termine con } k=0}}{-1}$$

Quando metto $x=1$ ho finito perchè il denominatore è fisso e diverso da 0, e il numeratore è limitato

$$|(e^{i})^{n+1}| = 1 \text{ per ogni } n \in \mathbb{N}.$$

ANALISI 1 — LEZIONE 070

Titolo nota 18/12/2014

Criterio di DIRICHLET Consideriamo una serie del tipo

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n$$

Supponiamo che

(i) $b_n \geq 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$

(ii) $b_{n+1} \leq b_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$

(iii) $b_n \to 0$

(iv) esiste $M \in \mathbb{R}$ t.c. $\left| \sum_{k=0}^{n} a_k \right| \leq M$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Allora la serie iniziale converge

Oss. Dirichlet $\Rightarrow$ Leibnitz. Basta porre $a_n = (-1)^n$ e osservare che le somme parziali di a_n sono alternativamente 1 e 0.

— o — o —

Esercizio Dimostrare che, per ogni $n \in \mathbb{N}$, si ha che

$$I_n := \int_0^{+\infty} \underbrace{\boxed{x^n e^{-x}}}_{f(x)} dx < +\infty$$

e calcolare esplicitamente I_n.

Dim. Unico pbm. a $+\infty$. Per studiare la convergenza faccio il C.A. con $g(x) = \frac{1}{x^2}$.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to +\infty} x^{n+2} e^{-x} \to 0 \text{ caso limite}$$

[$\frac{f(x)}{g(x)} \to 0$, quindi vicino al pbm. $\frac{f(x)}{g(x)} \leq 1$, quindi $f(x) \leq g(x)$]

L'integrale di $g(x) = \frac{1}{x^2}$ con pbm. a $+\infty$ converge $\Rightarrow I_n < +\infty$ qualunque sia n.

Per calcolare I_n integro per parti

$$\int_0^A \underset{G}{x^n} \underset{f}{e^{-x}} dx = \left[-\underset{F}{e^{-x}} \cdot \underset{G}{x^n} \right]_0^A - \int_0^A \underset{F}{(-e^{-x})} \underset{g}{n \cdot x^{n-1}} dx$$

$$= -A^n e^{-A} + n \int_0^A x^{n-1} e^{-x} dx$$

Passando al limite per $A \to +\infty$, per $n \geq 1$ si ottiene

$$\boxed{I_n = n I_{n-1}}$$

D'altra parte si verifica facilmente che $I_0 = \int_0^{+\infty} e^{-x} dx = 1$.
Da queste relazioni si ricava che

$$\boxed{I_n = n!}$$

— o — o —

<u>Def.</u> Si dice funzione GAMMA di EULERO la funzione

$$\boxed{\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt} \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

e soddisfa la relazione $\Gamma(n) = (n-1)!$

È l'estensione naturale del fattoriale ai numeri reali.

<u>Oss. 1</u> Come sopra si dimostra la relazione

$$\Gamma(x+1) = x\, \Gamma(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

che è l'analogo della relazione ricorrente per $(n-1)!$

Oss. 2 $\quad \dfrac{\sqrt{\pi}}{2} = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$ $\quad$ Pongo $x^2 = y$, cioè $x = \sqrt{y}$

$\rightsquigarrow dx = \dfrac{1}{2\sqrt{y}}\,dy$

$$= \int_0^{+\infty} e^{-y}\frac{1}{2\sqrt{y}}\,dy = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{y}}e^{-y}\,dy = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$$

Quindi $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$

— o — o —

Esercizio Sia $[a,b]$ un intervallo, sia $c \in (a,b)$

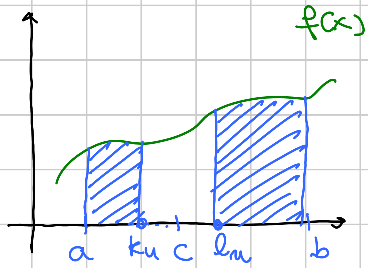
Considero due successioni

$k_n \to c^-$

$l_n \to c^+$

Sia $f(x)$ integrabile in $[a,b]$.

Pongo



$$I_n = \int_a^{k_n} f(x)\,dx + \int_{l_n}^{b} f(x)\,dx$$

Allora $I_n \to \displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$

$\boxed{\text{Dim.}}$ $\quad \displaystyle\int_a^b f(x)\,dx - I_n = \int_{k_n}^{l_n} f(x)\,dx$

additività rispetto alla zona di integrazione

Quindi $\displaystyle\left|\int_a^b f(x)\,dx - I_n\right| = \left|\int_{k_n}^{l_n} f(x)\,dx\right| \le \int_{k_n}^{l_n} |f(x)|\,dx$

$$\le M(l_n - k_n) \longrightarrow 0$$

essendo $f(x)$ limitata esiste un tale M

Poiché RHS $\to 0$ per $n \to +\infty$, anche LHS $\to 0$ per $n \to +\infty$.

— o — o —

Domanda: resta ancora vero l'enunciato se $f(x)$ è integrabile solo in senso improprio con un problema in c?

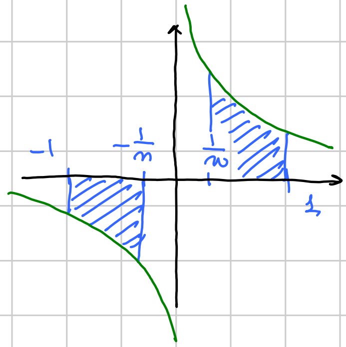
La risposta è sì solo se non si ammettono compensazioni tra $+\infty$ e $-\infty$.

$\boxed{\text{Dim.}}$ $$I_n = \int_a^{k_n} f(x)\,dx + \int_{l_n}^b f(x)\,dx \quad \text{se c'è un probl. in } c$$
$$\downarrow$$
$$\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

e avevamo definito l'int. improprio su $[a,b]$ come la somma dei due integrali monoproblema,

— o — o —

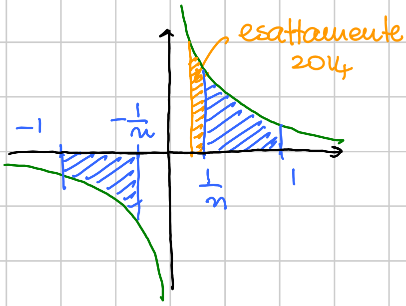
<u>Esempio</u> $$\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^3}\,dx$$



Se faccio "buco simmetrico", allora
$$I_n = \int_{-1}^{-\frac{1}{n}} \dots + \int_{\frac{1}{n}}^{1} \dots = 0 \to 0$$

Se faccio "buco asimmetrico", tipo $k_n = -\frac{1}{n}$ e $l_n = \frac{2}{n}$, allora
$$I_n = \int_{-1}^{-\frac{1}{n}} \dots + \int_{\frac{2}{n}}^{1} \dots = \left[-\frac{1}{2}\frac{1}{x^2}\right]_{-1}^{-\frac{1}{n}} + \left[-\frac{1}{2}\frac{1}{x^2}\right]_{\frac{2}{n}}^{1}$$
$$= -\frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}\frac{n^2}{4} = -\frac{3}{8}n^2 \to -\infty$$

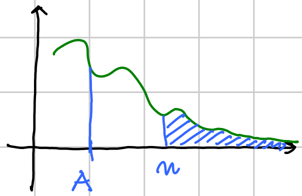
Posso fare un buco opportuno in modo che $I_n \to 2014$.



Esercizio Supponiamo che $\int_A^{+\infty} f(x)\,dx$ converga.

Allora la successione

$$I_n := \int_n^{+\infty} f(x)\,dx$$



è ben definita e $\underbrace{\lim_{n\to+\infty} I_n = 0}$

la "coda" dell' integrale improprio tende a 0.

$\boxed{\text{Dim.}}$ I_n è ben definito non appena $n \geq A$.

Spezzo in 2 parti l' integrale improprio

$$\int_A^{+\infty} f(x)\,dx = \int_A^{n} f(x)\,dx + \int_n^{+\infty} f(x)\,dx$$

si dimostra facilmente

Quindi $$I_n = \int_A^{+\infty} f(x)\,dx - \boxed{\int_A^{n} f(x)\,dx} \to 0$$

per def. di int. improprio tende a $\int_A^{+\infty}$

Analogamente $$J_n = \int_n^{n^2} f(x)\,dx$$

$$J_n = \int_A^{n^2} f(x)\,dx - \int_A^{n} f(x)\,dx$$

$$\int_A^{+\infty} f(x)\,dx - \int_A^{+\infty} f(x)\,dx = 0$$

Nelle ipotesi in cui l' integrale improprio converge

(Trovare facili controesempi altrimenti)

ANALISI 1 — LEZIONE 071

Titolo nota 18/12/2014

STUDIO DI FUNZIONI INTEGRALI

Funzioni definite mediante un integrale, ad esempio

$$F(x) = \int_0^x e^{-t^2}\,dt \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

$F(x)$ è una primitiva della funzione e^{-x^2}.

Teorema (molto misterioso) $F(x)$ non si può esprimere usando le funzioni elementari, composizioni e operazioni algebriche.

Esercizio Risolvere la disequazione

$$\arctan x \geq \int_0^x e^{-t^2}\,dt$$

Studio la funzione $g(x) = \arctan x - \int_0^x e^{-t^2}\,dt$

Intanto $g(x)$ è dispari perché $\arctan x$ e $F(x)$ sono dispari.
Poi $g(0) = 0$. Studio la monotonia

$$g'(x) = \frac{1}{1+x^2} - e^{-x^2} \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

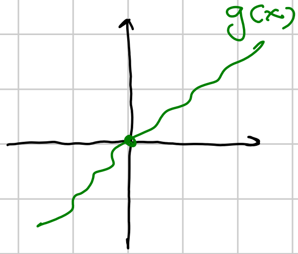
Provo a studiare il segno di $g'(x)$:

$$g'(x) \geq 0 \iff \frac{1}{1+x^2} \geq e^{-x^2} \iff e^{x^2} \geq 1+x^2$$

Ricordando la disuguaglianza classica $e^t \geq 1+t$ che è vera per ogni $t \in \mathbb{R}$ con uguaglianza se e solo se $t = 0$, otteniamo

$g'(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad$ e $\quad g'(x) = 0 \iff x = 0$

Monotonia 3 $\Rightarrow$ $g(x)$ è strett. crescente



Quindi $g(x) \geq 0 \iff x \geq 0$.

— o — o —

<u>Esercizio</u> Scrivere lo sviluppo di Taylor di ordine 5 di $F(x)$

$$F(x) = \int_0^x e^{-t^2}\,dt = \int_0^x \left(1 - t^2 + \frac{1}{2}t^4 + o(t^5)\right) dt$$

$$= x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{10}x^5 + o(x^6)$$

Ho usato un <u>fatto generale</u> già visto

Se $f(x) = o(x^k)$ per $x \to 0$, allora $\int_0^x f(t)\,dt = o(x^{k+1})$ per $x \to 0$

— o — o —

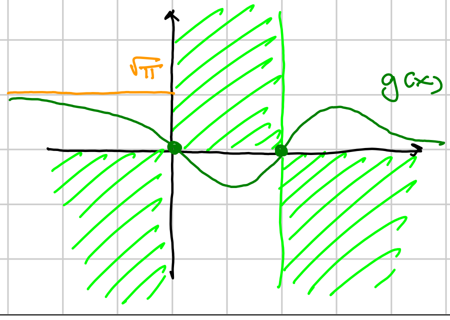
<u>Oss.</u> Questo giustifica formalmente come ottenere lo sviluppo di arctan x, arcsin x e settanh x (oggi si dice arctanh x) facendo la primitiva delle loro derivate.

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \ldots \quad \text{se faccio la primitiva}\ldots$$

— o — o —

<u>Esercizio</u> Studiare la funzione $\quad g(x) = \int_x^{x^2} e^{-t^2}\,dt$

Intanto $g(0) = 0$ e anche $g(1) = 0$.
Si studia bene il segno.
Essendo l'integrale di una funzione positiva, sarà $> 0 \iff x < x^2$, cioè se e solo se $x < 0$ oppure $x > 1$



$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\,dt = \sqrt{\pi}$$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0 \qquad \left[= \lim_{x\to+\infty} F(x^2) - F(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} - \frac{\sqrt{\pi}}{2} = 0 \right]$$

Queste sole informazioni bastano per dedurre che $g(x)$ è limitata.
Calcoliamo $g'(x)$. Consideriamo

$$F(x) = \int_0^x e^{-t^2}\,dt$$

Allora $g(x) = F(x^2) - F(x)$, quindi

$$g'(x) = F'(x^2)\cdot 2x - F'(x)$$

$$= e^{-x^4}\cdot 2x - e^{-x^2}$$

Volendo si potrebbe studiare il segno di $g'(x)$ studiando un'altra funzione.

— o — o —

$$g(x) = \int_{x^2}^{x^3} \arctan(t^5)\,dt$$

$$g'(x) = \arctan(x^{15})\cdot 3x^2 - \arctan(x^{10})\cdot 2x$$

Sviluppo di Taylor di ordine 30 di $g(x)$?

Per andare sul sicuro, pongo

$$F(x) = \int_0^x \arctan(t^5)\,dt = \int_0^x t^5 - \frac{1}{3}t^{15} + o(t^{24})\,dt$$

$$= \frac{1}{6}x^6 - \frac{1}{48}x^{16} + o(x^{25})$$

$$g(x) = F(x^3) - F(x^2) = \frac{1}{6}x^{18} - \frac{1}{12}x^{12} + o(x^{30})$$

<u>Esercizio</u> Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\int_n^{+\infty} e^{-t^2}\,dt}_{a_n \to 0} \quad \text{(dimostrato più volte)}$$

<u>1° modo</u>: $e^{-t^2} \leq e^{-t}$ vera per ogni $t \geq 1$, quindi

per $n \geq 1$ si ha $\displaystyle\int_n^{+\infty} e^{-t^2}\,dt \leq \int_n^{+\infty} e^{-t}\,dt \underset{\text{brutale}}{=} \left[-e^{-t}\right]_n^{+\infty} = e^{-n}$

Quindi $a_n \leq e^{-n}$, quindi la serie converge.

<u>Rilancio</u> $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} e^{n} \int_n^{+\infty} e^{-t^2}\,dt$

Ovviamente $e^{-t^2} \leq e^{-7t}$ per ogni $t \geq 7$ e da qui si chiude come prima

<u>Domanda</u>: come si comporta veramente $\displaystyle\int_n^{+\infty} e^{-t^2}\,dt = a_n$

Pongo $F(x) = \displaystyle\int_0^x e^{-t^2}\,dt$ e quindi

$$a_n = \frac{\sqrt{\pi}}{2} - F(n)$$

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{a_n}{e^{-n^2}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{\sqrt{\pi}}{2} - F(x)}{e^{-x^2}} \underset{\frac{0}{0} \Rightarrow \text{Hôp}}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{-\cancel{e^{-x^2}}}{-2x\,\cancel{e^{-x^2}}} = 0$$

Quindi a_n va a 0 più velocemente di e^{-n^2}.

— o — o —

<u>Domanda</u>: se $f(x) \to +\infty$ per $x \to +\infty$ è vero che $\dfrac{F(x)}{f(x)} \to +\infty$ per $x \to +\infty$

e^x dice che non è vero. Può essere che $\dfrac{F(x)}{f(x)} \to 0$?

$\boxed{\text{S1}}$ Basta prendere $f(x) = e^{x^2}$. La sua primitiva è

$$F(x) = \int_0^x e^{t^2}\,dt$$

e $$\lim_{x\to+\infty} \frac{F(x)}{f(x)} \underset{\uparrow}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{x^2}}{2x e^{x^2}} = 0$$

$\left[\frac{\infty}{\infty} \Rightarrow \text{Hôp}\right]$

Quanto cresce $F(x)$ (sappiamo che è meno di e^{x^2}).
Trovare una funzione $g(x)$ esplicita tale che

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{F(x)}{g(x)} = 1$$

Proviamo con $g(x) = \frac{e^{x^2}}{2x}$. Vediamo se funziona

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{F(x)}{g(x)} \overset{\text{Hôp}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{x^2}}{\frac{\cancel{2x}\cdot e^{x^2}}{\cancel{2x}} - \frac{e^{x^2}}{2x^2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{1-\frac{1}{2x^2}} = 1$$

Finalmente so come si comporta la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n^2} \int_0^n e^{x^2}\,dx \quad \text{si comp. come} \quad \sum \frac{1}{n} \quad !!!!$$

— o — o —

ANALISI 1 — LEZIONE 072

Titolo nota 24/02/2015

EQUAZIONI DIFFERENZIALI

In un' eq. diff. l' incognita è una funzione, che di solito si indica con una di queste notazioni:

$y(x)$ $y(t)$ $u(x)$ $u(t)$

L' eq. è una relazione che coinvolge t, $u(t)$ e un po' di derivate della funzione $u(t)$.

<u>Esempi</u>

$$u'(t) = u(t) + t^2$$
$$\cos(u'(t)) + \sin(u(t)) = 0$$
$$u''(t) + 7[u'(t)]^2 = \cos t$$

$$\boxed{\begin{array}{ll} u' = u + t^2 & 1 \\ \cos u' + \sin u = 0 & 1 \\ u'' + 7(u')^2 = \cos t & 2 \end{array}}$$

Notazione rapida: eliminiamo le t che sono argomento di $u(t)$, $u'(t)$, $u''(t)$, ...

<u>Def.</u> Si dice <u>ORDINE</u> di un' eq. diff. il massimo ordine di derivazione che compare nell' equazione.

<u>Notazione generale</u> Un' eq. diff. di ordine k si presenta nella forma generale

$$\boxed{\Phi(t, u(t), u'(t), \ldots, u^{(k)}(t)) = 0}$$

dove $\Phi : D \to \mathbb{R}$ e $D \subseteq \mathbb{R}^{k+2}$

c'è la derivata 0-esima $u(t)$ e c'è la t

Una funzione $u(t)$ è soluzione di un' eq. diff. come sopra se

- $\underbrace{u : (a,b)}$ $\to \mathbb{R}$ (oppure è definita su una semiretta aperta o tutto $\mathbb{R}$)

  l' insieme di definizione di $u(t)$ è tra le incognite del problema (l'arrivo è sempre $\mathbb{R}$)

- u è di classe C^k nell' insieme di definizione
- $(t, u(t), u'(t), \dots, u^{(k)}(t)) \in D$ (l' insieme di def. di Φ)
- l' equazione è soddisfatta per ogni $t \in (a,b)$ (o comunque l' insieme di definizione di $u(t)$).

Def. Un' equaz. diff. si dice in forma normale se "la derivata di ordine massimo è ricavata rispetto al resto", cioè se è della forma

$$\boxed{u^{(k)}(t) = F(t, u(t), u'(t), \dots, u^{(k-1)}(t))}$$

dove ora $F : \hat{D} \to \mathbb{R}$ con $\hat{D} \subseteq \mathbb{R}^{k+1}$

Esempi

$u'' = u' + 7u$	Forma normale
$u'' - 7u = \cos t$	quasi: si può mettere facilmente in F.N.
$(u'')^3 - 7u = \cos t$	quasi: " " " "
$t u'' - 7u = \cos t$	NI: posso ricavare, ma solo per $t \neq 0$
$(u'')^4 = 7u$	NO: non c'è verso di ricavare u'' in modo univoco.

Def. Un' eq. diff. si dice autonoma se la funzione Φ non dipende esplicitamente da t, ma solo da $u(t)$ e dalle sue derivate.

Oss. Se scrivo un' eq. diff. autonoma in notazione rapida, allora non compaiono le t.

Esempi $\underbrace{u''(t) = u(t)}_{\text{autonoma}}$ $u'' = u$

Proposizione Se una certa funzione $u(t)$ è soluzione di un'equazione autonoma, allora tutte le sue traslate temporali $u(t+c)$ (con $c \in \mathbb{R}$) sono soluzioni della stessa equazione.

$\boxed{\text{Dim.}}$ Sia $u : (a,b) \to \mathbb{R}$ una soluzione di

$$\Phi(u(t), u'(t), \ldots, u^{(k)}(t)) = 0 \leftarrow \text{vale per ogni } t \in (a,b)$$

Sia $v : (a-c, b-c) \to \mathbb{R}$ definita da $v(t) = u(t+c)$.
Allora v ha la stessa regolarità di u e

$$v^{(i)}(t) = u^{(i)}(t+c)$$

e quindi

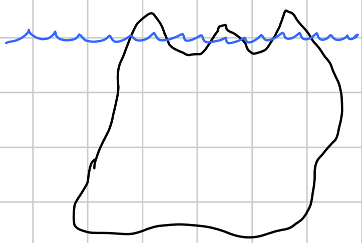
$$\underbrace{\Phi(v(t), v'(t), \ldots, v^{(k)}(t))}_{t \in (a-c, b-c)} = \Phi\underbrace{(u(t+c), u'(t+c), \ldots, u^{(k)}(t+c))}_{t+c \in (a,b)} = 0$$

per Hp.

— o — o —

Tre classi speciali di eq. diff.

1. Equazioni a variabili separabili (primo ordine)
2. Equazioni lineari del primo ordine (coeff. qualunque)
3. Equazioni lin. di ordine qualunque a coeff. costanti (omogenee e non omogenee)



Eq. variabili separabili

$$u' = f(t) \cdot g(u)$$

Eq. 1° ordine in forma normale con RHS che è prodotto di una funzione della sola t per una funzione della sola u

Oss. Le eq. del 1° ordine in forma normale autonome rientrano tra quelle a variabili separabili.

$$u' = g(u)$$

è come se ci fosse $f(t) \equiv 1$.

Eq. diff. lineari Un' eq. diff. lineare di ordine k è un' equaz. che si presenta nella forma

$$\boxed{a_k(t)\, u^{(k)}(t) + \dots + a_1(t)\, u'(t) + a_0(t)\, u(t) = f(t)}$$

o in maniera più compatta nella forma

$$\boxed{\sum_{i=0}^{k} a_i(t)\, u^{(i)}(t) = f(t)}$$

con l'accordo che $u^{(0)}(t) = u(t)$

Si dicono coefficienti dell' equazione le funzioni $a_i(t)$, che dipendono solo da t.

L' equazione si dice

- OMOGENEA se $f(t) \equiv 0$
- NON OMOGENEA altrimenti

Oss. Si può mettere in forma normale per i valori di t per cui $a_k(t) \neq 0$

grado max

Equazioni lineari del 1° ordine a coeff. qualunque

$$\boxed{u'(t) + a(t)\,u(t) = b(t)}$$

Eq. lin. ordine qualunque a coeff. costanti

$$\boxed{a_k u^{(k)}(t) + \dots + a_1 u'(t) + a_0 u(t) = f(t)}$$

$$\boxed{\sum_{i=0}^{k} a_i u^{(i)} = f(t)}$$

sono costanti, cioè non dipendono da t

Oss. ① lin. a coeff. costanti omog. $\overset{\text{SI}}{\Longrightarrow}$ autonoma

② lin. autonoma $\overset{\text{SI}}{\Longrightarrow}$ coeff. costanti

$\underset{\text{NO}}{\Longrightarrow}$ omogenea $\qquad u'' + 7u' + 5u = 8$

Non omog.

— o — o — o —

ANALISI 1 — LEZIONE 073

Titolo nota 24/02/2015

Esempi di soluzioni di equazioni differenziali

Esempio 1 $u' = u$ (1° ordine, lineare, omogenea, autonoma, variabili separabili, coeff. costanti)

$u(t) = e^t$ è una soluzione (le verifiche di solito sono banali)
$u(t) = e^t + 23$ NON è una soluzione, basta sostituire
$u(t) = 23e^t$ e più in generale $u(t) = ce^t$, con $c \in \mathbb{R}$, è una soluzione.
Si potrebbe dimostrare che tutte le soluzioni sono di questo tipo

$$\boxed{u(t) = ce^t}$$

Soluzione generale, che dipende da un parametro

Esempio 2 $u'' = -u$
Soluzioni: $\sin t$, $\cos t$, $23 \sin t$, $32 \cos t$
Si può dim. che la soluzione generale è

$$\boxed{u(t) = a \sin t + b \cos t}$$

Due parametri a e b reali qualunque

Esempio 3 $u' = -u^2$

Soluzioni: $u(t) = \frac{1}{t}$ Verifica: $u'(t) = -\frac{1}{t^2} = -[u(t)]^2$

Si può dimostrare che "tutte" le soluzioni sono del tipo

$$\boxed{u(t) = \frac{1}{t+c}}$$

Un parametro libero

Oltre a queste c'è anche la soluzione costante $u(t) \equiv 0$.

Fatto generale (FALSO, ma spesso vero) Un'eq. diff. ha infinite soluzioni dipendenti da un numero di parametri uguale all'ordine dell'equazione.

Oss. Soluzioni diverse possono avere insiemi di definizione diversi (vedi esempio 3 sopra).

Oss. Le infinite soluzioni dell'esempio 3 (ma anche dell'1 e 2) sono compatibili con il fatto delle traslate per le equazioni autonome.

$\boxed{\text{PROBLEMA DI CAUCHY}}$ $\boxed{\text{Eq. Diff. + condizioni iniziali}}$

Le condizioni iniziali di Cauchy per un'eq. di ordine k prescrivono il valore di $u(t)$ e di tutte le derivate fino alla $(k-1)$-esima per uno stesso valore t_0 di t. (sono k condizioni)

Esempi $\begin{cases} u' = 7u + t^2 \\ u(5) = 8 \end{cases}$ ← Eq. Diff.
← condizione "iniziale"

tempo iniziale

$\begin{cases} u' = 7u + t^2 \\ u'(5) = 8 \end{cases}$ → NON va bene: devo prescrivere u e non u'.

$\begin{cases} u'' = 7u' + 5u + t^2 \\ u(5) = 8 \\ u'(5) = 7 \end{cases}$ OK

$\begin{cases} u(5) = 8 \\ u'(6) = 8 \end{cases}$ NO

$\begin{cases} u(5) = 8 \\ u''(5) = 7 \end{cases}$ NO

Idea generale: La soluzione generale di un'eq. di ordine k dipende da k parametri. Ponendo k condizioni spero di poter determinare univocamente i k parametri.

Fatto generale (FALSO, ma quasi vero) Con le condizioni di Cauchy funziona, con le altre in generale no.

Esempio $\begin{cases} u' = 5u \\ u(0) = 8 \end{cases}$ $\rightsquigarrow$ sol. generale $u(t) = c e^{5t}$
$\rightsquigarrow$ se impongo la condizione trovo $c=8$

Il problema ha soluzione unica $u(t) = 8e^{5t}$.

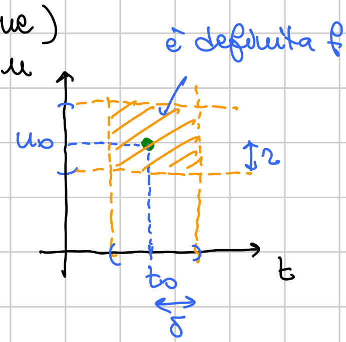
Oss. In fisica spesso si trovano eq. di ordine 2 ($u'' =$ acc.) e le condizioni di Cauchy corrispondono a prescrivere posizione e velocità iniziale.

— o — o —

TEOREMA MISTERIOSO 1 (teorema di sola esistenza)

Consideriamo il problema di Cauchy per un' eq. diff. in forma normale di ordine 1 (ma vale per ogni ordine)

$$\begin{cases} u' = f(t,u) \\ u(t_0) = u_0 \end{cases}$$



Supponiamo f definita in un rettangolino che contiene la condizione iniziale, diciamo

$$(t_0 - \delta, t_0 + \delta) \times (u_0 - r, u_0 + r) \qquad \delta > 0,\ r > 0$$

Supponiamo che f sia continua nella zona di definizione (bisognerebbe aver introdotto la continuità in 2 variabili).

Allora il problema ammette $\boxed{\text{almeno}}$ una soluzione.

— o — o —

TEOREMA MISTERIOSO 2 (teorema di esistenza e unicità)

Sia tutto come nel teorema 1. Supponiamo in aggiunta che f sia più che continua, cioè esiste L tale che

$$|f(t,u_1) - f(t,u_2)| \leq L\,|u_1 - u_2| \qquad \forall u_1 \in (u_0 - r, u_0 + r)$$
$$\forall u_2 \in (u_0 - r, u_0 + r)$$
$$\forall t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$$

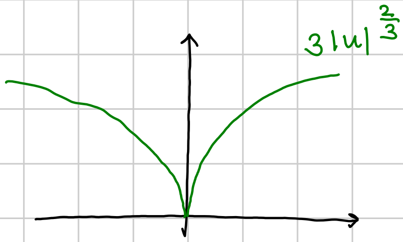
f, come funzione di u, è Lip. e la sua costante non dipende da t.

Allora il problema di Cauchy ha soluzione unica.

— o — o —

Esempio (L'Esempio)

$$\begin{cases} u' = 3\underbrace{|u|^{\frac{2}{3}}}_{f(u)} \\ u(0) = 0 \end{cases}$$

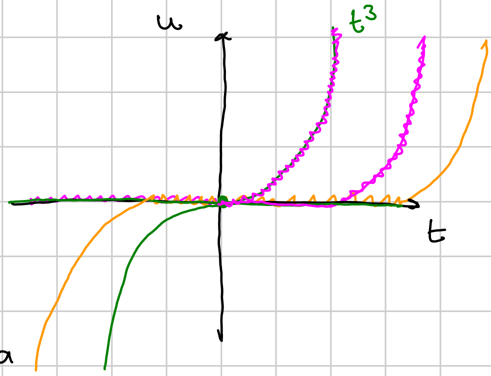


$f(u)$ NON è lipschitziana vicino all'origine, ma è continua

Una soluzione del pbm. di Cauchy è $u(t) \equiv 0$
Un'altra soluzione è $u(t) = t^3$ (verifica)
Quindi il pbm. di Cauchy ammette almeno 2 soluzioni

Una terza soluzione è

$$u(t) = \begin{cases} 0 & \text{per } t \leq 0 \\ t^3 & \text{per } t \geq 0 \end{cases}$$



Tutte le infinite traslate a dx della terza sono soluzioni.

Più in generale: tutte le "arancioni" sono soluzioni e dipendono da due parametri

— o — o —

ANALISI 1 – LEZIONE 074

Titolo nota 25/02/2015

EQUAZIONI DIFF. A VARIABILI SEPARABILI

$$\boxed{u' = f(t) \cdot g(u)}$$

Procedura:
1. Separare
2. Integrare
3. Ricavare

⇝ Soluzione generale

4. Determinare c ⇝ soluzione pbm. di Cauchy
5. Verifica!
6. Studiare la soluzione ottenuta

Esempio 1

$$\begin{cases} u' = u^2 \cdot t^3 \\ u(0) = 7 \end{cases}$$

1. Separare $\frac{du}{dt} = u^2 \cdot t^3$ Tutte le u da una parte tutte le t dall'altra

$$\frac{du}{u^2} = t^3\, dt$$

2. Integrare: LHS wrt u, RHS wrt t

$$-\frac{1}{u} = \frac{1}{4}t^4 + c$$

"+c" dell'integrazione

3. Ricavare: u in funzione di t,

$$u(t) = \frac{-1}{\frac{1}{4}t^4 + c} = \frac{-4}{t^4 + c}$$

4c o c è sempre una costante

$$\boxed{u(t) = \frac{-4}{t^4+c}}$$

Soluzione generale dell'eq. diff.

Verifica:

$$u'(t) = (+4)\,\frac{4t^3}{(t^4+c)^2} = \underbrace{\boxed{\frac{16}{(t^4+c)^2}}}_{u(t)^2}\cdot t^3$$

④ Determino c imponendo la condizione iniziale $u(0) = 7$

$$7 = u(0) = -\frac{4}{c} \quad \rightsquigarrow \quad c = -\frac{4}{7}$$

$$u(t) = \frac{-4}{t^4 - \frac{4}{7}} = \boxed{\frac{-28}{7t^4 - 4}}$$ Soluzione del pbm. di Cauchy

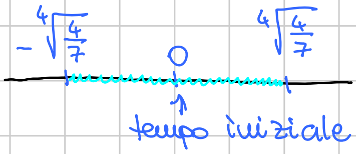
⑤ Verifoca → Risolve l'equazione
→ Rispetta il dato iniziale

⑥ Studiare la soluzione:

* determinare l'intervallo massimale di esistenza
* tempo di vita (nel futuro e/o nel passato)
* "tipo di morte" → BLOW UP
↳ BREAK DOWN

Def. Si dice intervallo max. di esistenza il più grande insieme connesso su cui la soluzione è definita
(brutalmente: è il pezzo dell'insieme di definizione di $u(t)$ che contiene il tempo iniziale)

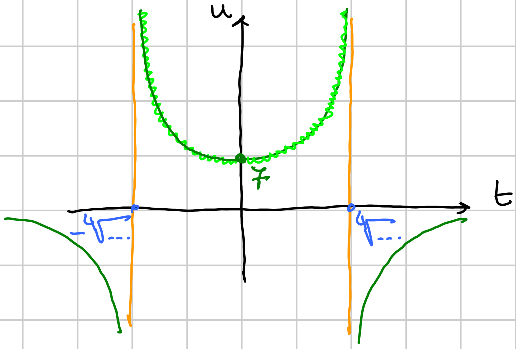
Nell'esempio $u(t)$ è definita per $t \neq \pm\sqrt[4]{\frac{4}{7}}$
quindi



int. max. esistenza $= \left(-\sqrt[4]{\dots}, \sqrt[4]{\dots}\right)$

Def. Il tempo di vita nel futuro (LIFE SPAN) è il sup dell'int. max. di esistenza. Analogamente nel passato.

Grafico di $u(t)$



Fisicamente: l'int. max. di esistenza riflette la zona in cui la soluzione è "attendibile"

Stabilito il life span, diciamo

- che c'è <u>esistenza globale</u> (nel futuro) se LIFE SPAN $= +\infty$
- altrimenti sia $T \in \mathbb{R}$ il life span. Allora abbiamo

$\rightarrow$ $\boxed{\text{BLOW UP}}$ se $\displaystyle\lim_{t \to T^-} u(t) = \pm\infty$

$\rightarrow$ $\boxed{\text{BREAK-DOWN}}$ se $u(t)$ esce dalla zona dove il RHS dell'equazione è definito. Spesso questo si traduce nell'avere ma non sempre

$$\lim_{t \to T^-} u'(t) = \pm\infty$$

Nell' esempio si può concludere dicendo

$\boxed{\text{La soluzione ha blow-up per } t = \sqrt[4]{\tfrac{4}{7}}}$

Oss.: il tempo di vita dipende dal dato iniziale

<u>Esempio 2</u> $\begin{cases} u' = u^2 \cdot t^3 \\ u(0) = 0 \end{cases}$

Se faccio come prima ritrovo $u(t) = \dfrac{-4}{t^4 + c}$ e se impongo $u(0) = 0$ ottengo

$$-\frac{4}{c} = 0 \qquad \text{OOPS!}$$

In tal caso la soluzione è $u(t) \equiv 0$ (interv. max. di esistenza $= \mathbb{R}$)

Esempio 3 $\begin{cases} u' = u - 1 \\ u(0) = 7 \end{cases}$

① Separare: $\frac{du}{dt} = u - 1$; $\frac{du}{u-1} = dt$

② Integrare: $\log|u-1| = t + c$

③ Ricavare: $|u-1| = e^{t+c}$ ... nel procedere ho problemi di segni

$$u(t) - 1 = \pm e^{t+c}$$

lo scelgo sulla base della condizione iniziale

$$u(0) - 1 = \pm e^{c}$$

$$6 = \pm e^{c} \rightsquigarrow \text{scelgo il segno } +$$

$$\boxed{u(t) = 1 \pm e^{t+c}}$$ soluzione generale

④ Ricavare c: prendo il segno $+$ e ottengo

$$7 = u(0) = 1 + e^{c} \rightsquigarrow e^{c} = 6 \rightsquigarrow c = \log 6$$

$$u(t) = 1 + e^{t + \log 6} = \boxed{1 + 6e^{t}}$$

Oss. $1 \pm e^{t+c} = 1 \pm e^{c} \cdot e^{t} = 1 + ke^{t}$

può essere positivo, negativo o nullo

Quindi la soluz. generale si può scrivere meglio come

$$\boxed{u(t) = 1 + ke^{t}}$$

Esempio 4 $\begin{cases} u' = -\dfrac{t}{u} \\ u(0) = 7 \end{cases}$

① $\dfrac{du}{dt} = -\dfrac{t}{u} \quad \rightsquigarrow \quad u\,du = -t\,dt$

② $\int u\,du = -\int t\,dt \quad \rightsquigarrow \quad \dfrac{u^2}{2} = -\dfrac{t^2}{2} + c \quad \rightsquigarrow \quad u^2 = -t^2 + c$

③ $\boxed{u(t) = \pm\sqrt{c - t^2}}$ Soluzione generale

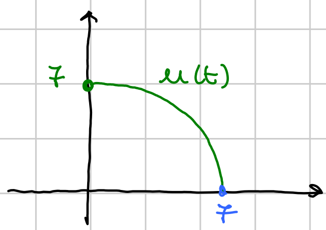
④ Per la condizione iniziale scelgo il segno +

$$7 = u(0) = \sqrt{c} \quad \rightsquigarrow \quad c = 49$$

Soluzione del pbm. di Cauchy : $\boxed{u(t) = \sqrt{49 - t^2}}$

⑤ Esercizio!

⑥ Int. max. esistenza: $[-7, 7]$



La soluzione nel futuro ha BREAK-DOWN per $T = 7$

Oss. $u(t) \to 0$ che è dove il RHS dell'equazione ha problemi. In particolare succede che

$$\lim_{t \to 7^-} u'(t) = -\infty$$

— o — o —

ANALISI 1 — LEZIONE 075

Titolo nota 25/02/2015

<u>Perchè funziona la procedura per trovare la soluzione generale</u>

$$u' = f(t) \cdot g(u)$$

<u>Oss.</u> Se $g(u_0) = 0$, allora $u(t) \equiv u_0$ è una soluzione dell' equazione (basta sostituire)

In pratica: se la condizione iniziale annulla la g, allora UNA $\boxed{\text{la}}$ soluzione è quella costante

$\boxed{\text{Dim. 1 della procedura}}$ Consideriamo il pbm di Cauchy

$$\begin{cases} u' = f(t) \cdot g(u) \\ u(t_0) = u_0 \end{cases}$$

Supponiamo $f : (t_0 - \delta, t_0 + \delta) \to \mathbb{R}$ e $g : (u_0 - r, u_0 + r) \to \mathbb{R}$ con $\delta > 0$ ed $r > 0$.

Supponiamo che $g(u_0) \neq 0$ (altrimenti la soluz. è costante).

Supponiamo di sapere già che la soluzione esiste.

Poichè $g(u(t_0)) \neq 0$, per continuità sarà vero che

$$g(u(t)) \neq 0 \qquad \forall\, t \in (t_0 - \delta_1, t_0 + \delta_1)$$

per un opportuno $\delta_1 > 0$. Considero l' eq. diff.

$$u'(t) = f(t) \cdot g(u(t)) \qquad \forall\, t \in (t_0 - \delta_1, t_0 + \delta_1)$$

Posso dividere per $g(u(t))$ ottenendo

$$\frac{u'(t)}{g(u(t))} = f(t) \qquad \forall\, t \in (t_0 - \delta_1, t_0 + \delta_1)$$

Preso un qualunque $t \in (t_0-\delta_1, t_0+\delta_1)$, integro LHS e RHS nella variabile t tra t_0 e t

$$\int_{t_0}^{t} \frac{u'(s)}{g(u(s))}\,ds = \int_{t_0}^{t} f(s)\,ds$$

Ora indico con $F(t)$ una primitiva di $f(t)$, cioè $F'(t) = f(t)$
e indico con $\Gamma(u)$ una primitiva di $\frac{1}{g(u)}$, cioè $\Gamma'(u) = \frac{1}{g(u)}$

Allora RHS $= F(t) - F(t_0)$ e

$$\text{LHS} = \int_{t_0}^{t} \frac{u'(s)}{g(u(s))}\,ds =$$

Pongo $x = u(s)$, quindi $dx = u'(s)ds$
Quando $s = t_0 \rightsquigarrow x = u(t_0) = u_0$
$s = t \rightsquigarrow x = u(t)$

$$= \int_{u_0}^{u(t)} \frac{1}{g(x)}\,dx$$

$$= \Gamma(u(t)) - \Gamma(u_0)$$

In conclusione abbiamo ottenuto

$$\boxed{\Gamma(u(t)) = F(t) \boxed{-F(t_0) + \Gamma(u_0)}}$$

è il c del brutale in termini delle condizioni iniziali

Brutalmente: ① $\frac{du}{dt} = f(t)\cdot g(u) \rightsquigarrow \frac{du}{g(u)} = f(t)\,dt$

② $\int \frac{du}{g(u)} = \int f(t)\,dt \rightsquigarrow \Gamma(u) = F(t) + c$

— o — o —

Dim 2 della procedura Tutto come sopra, ma non supponiamo di sapere già che la soluzione esiste.
Definisco Γ e F come sopra. Considero l'uguaglianza

$$\Gamma(u) = F(t) - F(t_0) + \Gamma(u_0)$$

Posso ricavare u, almeno per valori di t vicini a t_0, perché

$\Gamma(u)$ è una funzione monotona (essendo primitiva di $\frac{1}{g}$ che non si può annullare)

$$\boxed{u(t) = \Gamma^{-1}\left(F(t) - F(t_0) + \Gamma(u_0)\right)}$$

Dico che $u(t)$ è una soluz. del probl. di Cauchy fino a dove è definita.

Verifica della cond. iniz.: $u(t_0) = \Gamma^{-1}(\Gamma(u_0)) = u_0$

Verifica dell'equazione:

$$u'(t) = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{funzione composta}}}{=} (\Gamma^{-1})'\left(F(t) - F(t_0) + \Gamma(u_0)\right) \cdot f(t)$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{funzione inversa}}}{=} \frac{1}{\Gamma'\left(\Gamma^{-1}\left(F(t) - F(t_0) + \Gamma(u_0)\right)\right)} \cdot f(t)$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \Gamma' = \frac{1}{g}}}{=} g\left(\Gamma^{-1}\left(F(t) - F(t_0) + \Gamma(u_0)\right)\right) \cdot f(t)$$

$$= g(u(t)) \cdot f(t)$$

— o — o —

Oss. La dimostrazione 2 mostra l'esistenza senza assumere teoremi misteriosi

La dimostrazione 1 mostra l'unicità, usando solo la continuità e non la lip. di g, fino a quando $g(u(t)) \neq 0$

— o — o —

Esempio $\begin{cases} u' = u^4 \cdot \cos t \\ u(0) = \alpha \end{cases}$ Studiare il comportamento al variare di α

$\boxed{1-2-3}$ $\frac{du}{dt} = u^4 \cdot \cos t \rightsquigarrow \frac{du}{u^4} = \cos t \, dt$

$$\int \frac{du}{u^4} = \int \cos t \, dt = -\frac{1}{3}\frac{1}{u^3} = \sin t + c \rightsquigarrow u^3 = \frac{-1}{3\sin t + c}$$

$$\boxed{u(t) = -\frac{1}{\sqrt[3]{3\sin t + c}}}$$ Soluzione generale

④ Condizione iniziale: $\alpha = u(0) = -\frac{1}{\sqrt[3]{c}} \rightsquigarrow c = -\frac{1}{\alpha^3}$

Soluz. pbm. di Cauchy

$$u(t) = -\frac{1}{\sqrt[3]{3\sin t - \frac{1}{\alpha^3}}} = \boxed{\frac{\alpha}{\sqrt[3]{1-3\alpha^3 \sin t}}}$$ VERIFICA!!

⑥ Tutto dipende da α, cioè dall'avere soluzioni l'eq. $1-3\alpha^3 \sin t = 0$.

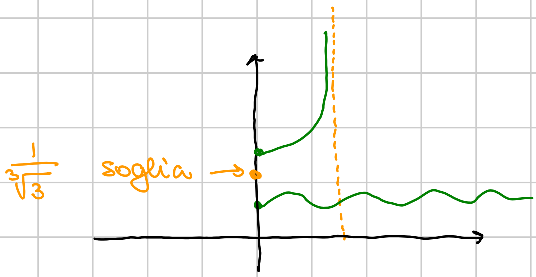
$$\sin t = \frac{1}{3\alpha^3}$$

- Se $-1 \leq \frac{1}{3\alpha^3} \leq 1$, allora l'equazione ha soluzioni per cui la soluzione ha blow-up in tempo finito
- Se siamo nell'altro caso, allora la soluzione ha esistenza globale.

EFFETTO SOGLIA:

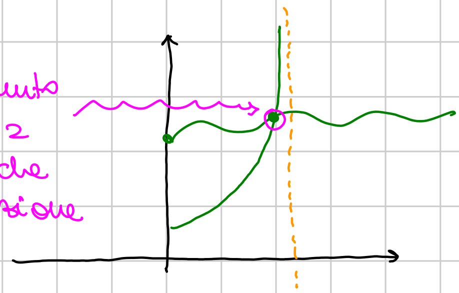
Sopra $\frac{1}{\sqrt[3]{3}} \rightsquigarrow$ BLOW-up

SOTTO: $\rightsquigarrow$ esistenza globale

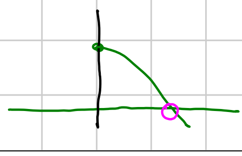


Oss. Non è possibile avere soluzioni limitate per α grandi e soluzioni non limitate per α piccoli

da questo punto partirebbero 2 soluzioni, il che è una violazione di unicità



Oss. Poichè $u(t) \equiv 0$ è una soluzione e siamo nelle ipotesi di unicità, per forza chi parte $\underset{<0}{>0}$ resta sempre $\underset{<0}{>0}$



ANALISI 1 — LEZIONE 076

Titolo nota 27/02/2015

EQUAZIONI DIFFERENZIALI LINEARI

$$\boxed{\sum_{i=0}^{k} a_i(t)\, u^{(i)}(t) = f(t)}$$

Di solito si assume $a_k(t) \equiv 1$ (il che garantisce che si può mettere in forma normale).
L' eq. si dice omogenea se $f(t) \equiv 0$.
Supponemo sempre che tutti i coeff. sono definiti e continui in un intervallo (a,b) comune.
Sotto questa ipotesi l' eq. soddisfa le cond. del teorema di esistenza e unicità.

Fatto misterioso Se tutti i coeff. sono definiti in (a,b) anche tutte le soluzioni sono definite in (a,b). Se tutti i coeff. sono definiti e continui su tutto $\mathbb{R}$, allora idem le soluzioni.
(Brutalmente: la soluzione di una eq. lin. esiste finché può).
Stessa cosa anche per il termine noto.

Il LHS può essere visto come un operatore lineare

$$L : C^k((a,b)) \to C^0((a,b))$$

La verifica che L è lineare è quasi ovvia. Dovrei verificare che

$$L(u+v) = Lu + Lv \qquad \forall u \in C^k \ldots \quad \forall v \in C^k \ldots$$

$$L(\lambda u) = \lambda Lu \qquad \forall u \in C^k, \ \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

Risolvere un' eq. diff. OMOGENEA vuol dire trovare il ker di L

— o — o —

$\boxed{\text{Teorema}}$ Consideriamo un' eq. diff. lin. OMOGENEA di ordine k. Allora l' insieme delle soluzioni è uno spazio vettoriale di dimensione k.

Conseguenza operativa Detta $u_1(t), \dots, u_k(t)$ una base di questo spazio, allora la soluzione generale si scriverà nella forma

$$\boxed{u(t) = c_1 u_1(t) + \dots + c_k u_k(t)}$$

sol. gen. eq. diff. lin. omog.

k parametri liberi

Se conosco una base, conosco la soluzione generale.

$\boxed{\text{Dim.}}$ Il fatto che l' insieme delle sol. è uno spazio vettoriale segue dall' essere un ker.
Volendolo fare direttamente ... siano $u(t)$ e $v(t)$ due soluzioni, cioè

$$\sum_{i=0}^{k} a_i(t)\, u^{(i)}(t) = 0 \qquad \sum_{i=0}^{k} a_i(t)\, v^{(i)}(t) = 0$$

Posto $w(t) := u(t) + v(t)$, avremo che

$$w^{(i)}(t) = u^{(i)}(t) + v^{(i)}(t) \qquad \forall\, i = 0, \dots, k$$

e quindi sommando le due relazioni prec. si ottiene

$$\sum_{i=0}^{k} a_i(t)\, w^{(i)}(t) = 0$$

cioè $w(t)$ è ancora soluzione.
Idem la verifica che $\lambda u(t)$ è ancora soluzione.

Per dimostrare che ha dim k, devo esibire una base costituita da k elementi.

Definisco $u_i(t)$ come la soluzione dell'equazione che verifica le cond. iniziali

$$u^{(i-1)}(t_0) = 1 \qquad u^{(j)}(t_0) = 0 \qquad \text{per } j \neq i-1$$

scelto a piacimento

Le soluzioni $u_i(t)$ così ottenute sono generatori.
Infatti prendiamo una qualunque altra soluzione, e supponiamo che abbia

$$u^{(i)}(t_0) = \alpha_i \qquad i = 0, \dots, k-1$$

Allora dico che

$$u(t) = \alpha_1 u_1(t) + \dots + \alpha_k u_k(t)$$

Questo è vero perchè il RHS è ancora una soluzione e assume gli stessi valori delle derivate in t_0.

Perchè sono linearmente indipendenti? Prendiamo una loro combinazione lineare

$$c_1 u_1(t) + \dots + c_k u_k(t) = u(t)$$

e supponiamo che sia la funzione identicamente nulla.
Allora tutte le sue derivate si annullano in t_0, ma

$$u(t_0) = c_1, \quad u'(t_0) = c_2, \quad u''(t_0) = c_3, \dots$$

quindi tutti i coeff. sono nulli.

— o — o —

Teoria generale dei sistemi non omogenei

Consideriamo un' eq. diff. lin. non omog. $\boxed{Lu = f}$

Fatto 1 La differenza di due soluzioni è una soluzione dell' eq. omogenea associata $Lu = 0$.

Dim. Ovviamente...

$$\sum_{i=0}^{k} a_i(t)\, u^{(i)}(t) = f(t) \qquad \sum_{i=0}^{k} a_i(t)\, v^{(i)}(t) = f(t)$$

Sottraendo e ponendo $w(t) := u(t) - v(t)$ si ottiene

$$\sum_{i=0}^{k} a_i(t)\, w^{(i)}(t) = \sum_{i=0}^{k} a_i(t)\left[u^{(i)}(t) - v^{(i)}(t)\right] = f(t) - f(t) = 0.$$

Più brevemente $Lw = L(u-v) = Lu - Lv = f - f = 0$

Fatto 2 Se v è una sol. dell' eq. non omogenea e w è una sol. dell' eq. omogenea, allora $v + w$ risolve la non omogenea

Dim $L(v+w) = Lv + Lw = f + 0 = f$

Conseguenza operativa: la soluzione generale di un' eq. diff. non omogenea si scrive come

$$\boxed{u(t) = \underbrace{\bar{u}(t)}_{\substack{\text{soluzione speciale qualunque}\\ \text{dell' eq. non omogenea}}} + \underbrace{c_1 u_1(t) + \ldots + c_k u_k(t)}_{\text{soluzione generale dell' omogenea}}}$$

Oss. Se voglio trovare TUTTE le sol. di un'eq. non omogenea basta che trovi
- una soluzione qualunque $\bar{u}(t)$ della non omogenea
- una base dello spazio delle soluzioni dell'omogenea.

Esempio È facile trovare una base nel caso delle equazioni di ordine 1 omogenee

$$u'(t) + a_0(t)\,u(t) = 0 \qquad\qquad u' + a(t)\,u = 0$$

Portando al RHS $\quad u' = -a(t)\,u$
diventa a variabili separabili

$$\frac{du}{dt} = -a(t)\,u \rightsquigarrow \frac{du}{u} = -a(t)\,dt \rightsquigarrow \log|u| = \underbrace{-A(t)}_{\substack{\text{primitiva} \\ \text{di } a(t)}} + c$$

$$\rightsquigarrow |u(t)| = e^{-A(t)+c} = e^{c} \cdot e^{-A(t)}$$

$$\rightsquigarrow u(t) = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{parametro} \\ \text{libero}}}{c} \cdot \boxed{e^{-A(t)}}$$

$u_1(t)$ base dello spazio delle soluzioni

Oss. Si vede bene che l'insieme di definizione di $u(t)$ è lo stesso di $a(t)$.

Oss. Tutti i discorsi fatti finora sfruttano la linearità delle equazioni, ma i coefficienti possono essere funzioni qualunque purché continue.

ANALISI 1 - LEZIONE 077

Titolo nota 27/02/2015

$\boxed{\text{Equazione omogenea a coeff. costanti}}$

$$\boxed{\sum_{i=0}^{k} a_i\, u^{(i)}(t) = 0}$$

costanti, cioè numeri

Esiste un algoritmo per trovare esplicitamente una base dello spazio delle soluzioni.

Polinomio caratteristico : $\boxed{\displaystyle\sum_{i=0}^{k} a_i x^i}$

Algoritmo : equazione $\rightsquigarrow$ pol. car. $\rightsquigarrow$ radici $\rightsquigarrow$ base.

Il polinomio ha grado k, quindi k radici complesse pensate con molteplicità.

$\boxed{\text{Caso delle equazioni con } k=2}$ Il pol. è ax^2+bx+c

Ci sono 3 casi

$\boxed{1^\circ \text{ caso}}$ Due radici reali distinte : λ, μ. Allora una base è $e^{\lambda t}$, $e^{\mu t}$, quindi la sol. gen. è

$$u(t) = c_1 e^{\lambda t} + c_2 e^{\mu t}$$

$\boxed{\text{Dim.}}$ Verifica che sono soluz. e sono lin. indip.. L'equazione è

$$a\,u''(t) + b\,u'(t) + c\,u(t) = 0$$

Prendiamo $u(t) = e^{\lambda t}$, $u'(t) = \lambda e^{\lambda t}$, $u''(t) = \lambda^2 e^{\lambda t}$

Sostituendo

$$e^{\lambda t} \underbrace{(a\lambda^2 + b\lambda + c)}_{=0 \text{ perché } \lambda \text{ è radice}} = 0$$

Verifico che sono lin. indip. in ogni intervallo.
Supponiamo che

$$c_1 e^{\lambda t} + c_2 e^{\mu t} = 0 \qquad \forall t \in (t_1, t_2)$$

Prendo $t_0 \in (t_1, t_2)$ e allora dovrà essere

$$\boxed{c_1 e^{\lambda t_0}} + \boxed{c_2 e^{\mu t_0}} = 0 \qquad \text{la funzione si annulla}$$

$$\lambda \boxed{c_1 e^{\lambda t_0}} + \mu \boxed{c_2 e^{\mu t_0}} = 0 \qquad \text{la derivata si annulla}$$

Questo implica $c_1 = c_2 = 0$ perché $\operatorname{Det}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda & \mu \end{pmatrix} \neq 0$

VANDERMONDE

— o — o —

$\boxed{2^o \text{ caso}}$ Due radici complesse coniugate $\alpha \pm i\beta$.
Una base è

$$e^{\alpha t} \cos(\beta t), \quad e^{\alpha t} \sin(\beta t)$$

quindi la sol. gen. è

$$\boxed{u(t) = c_1 e^{\alpha t} \cos(\beta t) + c_2 e^{\alpha t} \sin(\beta t)}$$

$\boxed{\text{Dim.}}$ I conti da fare sono gli stessi di prima, è solo più scomodo fare le derivate (fare una volta per esercizio)

Passando per i complessi ... uno vorrebbe scrivere

$$e^{(\alpha+i\beta)t} = e^{\alpha t} \cdot e^{i\beta t} = e^{\alpha t} (\cos(\beta t) + i \sin(\beta t))$$

$$e^{(\alpha-i\beta)t} = e^{\alpha t} (\cos(\beta t) - i \sin(\beta t))$$

Facendo semisomma e semidifferenza si ottiene una nuova base, che è quella di prima.

— o — o —

$\boxed{3° \text{ caso}}$ Una radice reale λ di molteplicità 2.
Una base è
$$e^{\lambda t} \qquad t e^{\lambda t}$$
quindi la soluzione generale è
$$\boxed{u(t) = c_1 e^{\lambda t} + c_2 t e^{\lambda t} = (c_1 + c_2 t) e^{\lambda t}}$$

$\boxed{\text{Dim.}}$ Derivare e sostituire ... e poi verificare la lineare indipendenza

Brutal mode: prendiamo il caso con 2 radici reali distinte.
Una base è $e^{\lambda t}$, $e^{\mu t}$
Un'altra base è
$$e^{\lambda t}, \quad \frac{e^{\lambda t} - e^{\mu t}}{\lambda - \mu} = e^{\mu t} \, \frac{e^{(\lambda-\mu)t} - 1}{\lambda - \mu}$$
$$e^{\lambda t} \to e^{\lambda t}, \qquad e^{\mu t} \to e^{\lambda t}, \qquad \frac{e^{(\lambda-\mu)t} - 1}{\lambda - \mu} \to t$$

— o — o —

Cosa succede nel caso generale? Se l'eq. è di ordine, il polinomio caratteristico ha grado k, quindi k radici in un opportuno senso e

- una radice reale λ produce e^{λ} se ha molt. 1
- una coppia di radici $\alpha \pm i\beta$ produce $e^{\alpha t} \cos(\beta t)$, $e^{\alpha t} \sin(\beta t)$
- una radice reale λ di molteplicità m produce m elementi
$$e^{\lambda t}, \; t e^{\lambda t}, \ldots, t^{m-1} e^{\lambda t}$$
- una coppia di radici complesse coniugate $\alpha \pm i\beta$ di molt. m produce $2m$ elementi
$$\begin{array}{llll} e^{\lambda t} \cos(\beta t), & t e^{\lambda t} \cos(\beta t), \ldots, & t^{m-1} \ldots \\ e^{\lambda t} \sin(\beta t), & t e^{\lambda t} \sin(\beta t), \ldots, & t^{m-1} \ldots \end{array}$$

Esempio 1 $\quad u'' + 3u' = 0 \qquad x^2+3x = 0 \qquad x=0,\ x=-3$

$$u(t) = a e^{0t} + b e^{-3t} = a + b e^{-3t}$$

Esempio 2 $\quad u'' + 3u = 0 \qquad x^2+3 = 0 \qquad x = \pm\sqrt{3}\, i$

$\alpha = 0,\ \beta = \sqrt{3}$

$$u(t) = a e^{0t}\cos(\sqrt{3}t) + b e^{0t}\sin(\sqrt{3}t)$$
$$= a\cos(\sqrt{3}t) + b\sin(\sqrt{3}t)$$

Esempio 3 $\quad u'' + u = 0 \rightsquigarrow u(t) = a\cos t + b\sin t$

$u'' - u = 0 \rightsquigarrow x^2-1=0 \rightsquigarrow x = \pm 1$

$u(t) = a e^{t} + b e^{-t}$ MA ANCHE

$u(t) = a\cosh t + b\sinh t$

$$\mathrm{Span}(e^t, e^{-t}) = \mathrm{Span}(\cosh t, \sinh t)$$

Esempio 4 $\quad u^{(5)} + 9u^{(3)} = 0 \qquad x^5 + 9x^3 = 0$

$x^3(x^2+9) = 0$

$x = 0 \qquad x = \pm 3i$

$$\boxed{u(t) = a\cos(3t) + b\sin(3t) + \underbrace{c + dt + et^2}_{x=0 \text{ ha molteplicità } 3}}$$

— o — o —

Metodi per determinare una soluzione di un'eq. non omogenea

① Provare a indovinare (comodissimo se riesce)

② Metodo di variazione delle costanti (riesce sempre, ma è una valanga di calcoli)

Esempio 1 $\quad u'' + 3u' + 2u = e^{7t}$ $\qquad x^2+3x+2=0$, $x=-1$, $x=-2$

La soluzione la cerco del tipo $u(t) = \alpha e^{7t}$

$u'(t) = 7\alpha e^{7t} \qquad u''(t) = 49\alpha e^{7t}$ ... sostituisco

$$49\alpha e^{7t} + 21\alpha e^{7t} + 2\alpha e^{7t} = e^{7t} \qquad 72\alpha = 1 \qquad \alpha = \frac{1}{72}$$

La soluzione generale è

$$\boxed{u(t) = \frac{1}{72} e^{7t} + a e^{-2t} + b e^{-t}}$$

Esempio 2 $\quad u'' + 3u' + 2u = e^{-2t}$

Cosa succede se vado a sostituire $u(t) = \alpha e^{-2t}$? Viene 0 !!!

In questo caso il tentativo giusto è $u(t) = \alpha t e^{-2t}$

— o — o —

ANALISI 1 - LEZIONE 078

Titolo nota 03/03/2015

Equazioni diff. lineari non omogenee (a coeff. costanti)

$$\underbrace{\sum_{i=0}^{k} a_i \, u^{(i)}}_{Lu} = f(t)$$

Già visto: la soluzione gen è del tipo

$$u(t) = \underbrace{\bar{u}(t)}_{\text{sol. qualunque eq. non omog.}} + \underbrace{c_1 u_1(t) + \ldots + c_k u_k(t)}_{\text{sol. gen. equaz. omog.}}$$

Fin qui vale anche se i coeff. sono variabili.

Per determinare $\bar{u}(t)$, conviene "andare a occhio".

Esempio 1 $\quad u'' + 7u' + 12u = e^{2t}$

Cerco una soluz. del tipo $u(t) = \alpha e^{2t}$

coeff. incognito

Fatto generale: se il RHS è del tipo $e^{\lambda t}$, allora il tentativo da fare è $u(t) = \alpha e^{\lambda t}$. (anche 7^t è del tipo...)

Questo NON funziona se e solo se λ è radice del polinomio caratteristico. In quel caso il tentativo da fare è $u(t) = \alpha t^m e^{\lambda t}$, dove m è la molteplicità di λ come radice del pol. caratteristico

$$\underbrace{u'' - 2u' + u}_{x^2 - 2x + 1} = e^t$$

sostituiti fanno venire LHS = 0

$\overbrace{u(t) = \alpha e^t, \quad u(t) = \alpha t e^t}$, $\quad u(t) = \alpha t^2 e^t$

$x^2 - 2x + 1$ ha radice $x = 1$ con molt. 2

Esempio 2 $\quad u'' + 7u' + 12u = \sin t$

Cerco una soluzione del tipo $\quad u(t) = \alpha \sin t + \beta \cos t$

$u'(t) = \alpha \cos t - \beta \sin t \quad , \quad u''(t) = -\alpha \sin t - \beta \cos t$

Sostituisco:

$$\underbrace{-\alpha \sin t - \beta \cos t}_{u''} \underbrace{+ 7\alpha \cos t - 7\beta \sin t}_{+7u'} \underbrace{+ 12\alpha \sin t + 12\beta \cos t}_{+12u} = \sin t$$

$\begin{cases} -\alpha - 7\beta + 12\alpha = 1 \\ -\beta + 7\alpha + 12\beta = 0 \end{cases}$ coeff. di $\sin t$ / " " $\cos t$ $\rightsquigarrow$ risolvo e trovo α e β.

Fatto generale: se il RHS è del tipo $\sin(\lambda t)$ o $\cos(\lambda t)$ il tentativo da fare è

$$u(t) = \alpha \sin(\lambda t) + \beta \cos(\lambda t)$$

coeff. incogniti

Questo non funziona se e solo se $\sin(\lambda t)$ o $\cos(\lambda t)$ sono soluzioni dell'omogenea, cioè se e solo se $\pm \lambda i$ sono radici del pol. caratt. In quel caso occorre mettere t^m davanti, dove m è la molteplicità.

Oss. Potenze ad esponente intero positivo di $\sin(\lambda t)$ e $\cos(\lambda t)$ si riducono al caso precedente.

Esempio 3 $\quad u'' + 7u' + 12u = t^2 + 5$

Tentativo: $u(t) = at^2 + bt + c$ (con tutti i coeff.)

$u'(t) = 2at + b \qquad u''(t) = 2a$

$$2a + 14at + 7b + 12at^2 + 12bt + 12c = t^2 + 5$$

$$\begin{cases} 12a = 1 & \text{coeff. } t^2 \\ 14a + 12b = 0 & \text{coeff. } t \\ 2a + 7b + 12c = 5 & \text{termine noto} \end{cases}$$

(Viene fuori sempre un sistema triangolare)

Fatto generale: se il RHS è un polinomio, provo con $u(t) =$ pol. dello stesso grado a coeff. incogniti.

Questo NON funziona se e solo se $x = 0$ è soluzione dell'eq. caratteristica, nel qual caso occorre moltiplicare tutto per t^m.

Esempio 4 $\quad u''' - u'' = t^2 \qquad x^3 - x^2 = x^2(x-1)$

Tentativo da fare: $u(t) = t^2(at^2 + bt + c)$
$= at^4 + bt^3 + ct^2$

Se usassi $u(t) = at^4 + bt^3 + ct^2 + dt + e$ non riuscirei a determinare (ovviamente) d ed e.

$u'(t) = 4at^3 + 3bt^2 + 2ct \quad , \quad u''(t) = 12at^2 + 6bt + 2c$
$u'''(t) = 24at + 6b$

Sostituisco

$$24at + 6b - 12at^2 - 6bt - 2c = t^2$$

$$\begin{cases} -12a = 1 \\ 24a - 6b = 0 \\ 6b - 2c = 0 \end{cases}$$

$a = -\frac{1}{12}$, $\quad -2 - 6b = 0 \rightsquigarrow b = -\frac{1}{3}$

$2c = 6b \rightsquigarrow c = 3b = -1$

Soluzione generale:

$$u(t) = -\frac{1}{12}t^4 - \frac{1}{3}t^3 - t^2 + \underbrace{ae^t + b + ct}_{\text{sol. gen. omogenea}}$$

Altri possibili RHS

① Se c'è $p(t)\,e^{\lambda t}$ con $p(t)$ polinomio, provo con

$$u(t) = e^{\lambda t} \cdot \text{pol. dello stesso grado a coeff. incogniti}$$

② Se c'è $p(t)\sin(\lambda t)$, provo con

$$u(t) = \sin(\lambda t)\cdot\text{polinomio} + \cos(\lambda t)\cdot\text{polinomio}$$

③ Se c'è $\cos(\lambda t)\cdot e^{\mu t}$, provo con

$$u(t) = (a\cos(\lambda t) + b\sin(\lambda t))\,e^{\mu t}$$

coeff. incogniti.

④ Se il RHS è la somma di più termini che si sanno trattare, allora risolvo separatamente e sommo le soluzioni.

Dim. $Lu_1 = f_1$ e $Lu_2 = f_2 \Rightarrow L(u_1+u_2) = f_1+f_2$ per linearità.

— o — o —

$\boxed{\text{METODO DI VARIAZIONE DELLE COSTANTI}}$

Esempio $u'' + 2u' - 3u = e^{2t}$ $\qquad x^2+2x-3 = (x+3)(x-1)$

La soluzione dell'omogenea è $u(t) = a\,e^{t} + b\,e^{-3t}$

costanti

Cerco una soluzione della non omogenea del tipo

$$u(t) = a(t)\,e^{t} + b(t)\,e^{-3t}$$

faccio variare le costanti

$$u'(t) = \underbrace{a'(t)\, e^{t}} + a(t)e^{t} + \underbrace{b'(t)\, e^{-3t}} - 3b(t)\, e^{-3t}$$

$$\boxed{a'(t)e^{t} + b'(t)e^{-3t} = 0} \qquad 1^a \text{ equazione}$$

$$u''(t) = a'(t)\, e^{t} + a(t)\, e^{t} - 3b'(t)\, e^{-3t} + 9b(t)\, e^{-3t}$$

derivo solo due termini

Sostituisco u'', u' e u nell'equazione iniziale:

$$\begin{array}{ll} u''(t) & a'(t)\, e^{t} + \cancel{a(t) e^{t}} - 3b'(t)\, e^{-3t} + \cancel{9b(t) e^{-3t}} \\ +2u'(t) & + \cancel{2a(t)\, e^{t}} - \cancel{6b(t)\, e^{-3t}} \\ -3u(t) & - \cancel{3a(t)\, e^{t}} - \cancel{3b(t)\, e^{-3t}} \qquad = e^{2t} \end{array}$$

I termini con $a(t)$ e $b(t)$ DEVONO andarsene. Resta

$$\boxed{a'(t)\, e^{t} - 3b'(t)\, e^{-3t} = e^{2t}} \qquad 2^a \text{ equazione}$$

Mettendo insieme le 2 equazioni trovo

$$\begin{cases} a'(t)\, e^{t} + b'(t)\, e^{-3t} = 0 \\ a'(t)\, e^{t} - 3b'(t)\, e^{-3t} = e^{2t} \end{cases}$$

Risolvo: $4b'(t)\, e^{-3t} = -e^{2t} \rightsquigarrow b'(t) = -\frac{1}{4} e^{5t}$

$$4a'(t)\, e^{t} = e^{2t} \rightsquigarrow a'(t) = \frac{1}{4} e^{t}$$

$$\rightsquigarrow a(t) = \frac{1}{4} e^{t}, \quad b(t) = -\frac{1}{20} e^{5t} \qquad \text{(primitive qualunque)}$$

$$u(t) = a(t)\, e^{+t} + b(t)\, e^{-3t}$$

$$= \frac{1}{4} e^{t} \cdot e^{t} - \frac{1}{20} e^{-3t} \cdot e^{5t} = \frac{1}{4} e^{2t} - \frac{1}{20} e^{2t} = \frac{1}{5} e^{2t}$$

Oss. Quando ho sostituito u'', u' e u se ne sono andati i termini con $a(t)$ e $b(t)$ perchè erano del tipo

$$a(t)\,\underset{\overset{\shortparallel}{0}}{L(e^{t})} + b(t)\,\underset{\overset{\shortparallel}{0}}{L(e^{-3t})}$$

perché e^{t} ed e^{-3t} sono soluzioni dell'eq. omogenea

Si può verificare che il sistema finale in $a'(t)$ e $b'(t)$ ha sempre soluzione, cioè $\det \neq 0$.

— o — o —

ANALISI 1 — LEZIONE 079

Titolo nota 03/03/2015

Eq. diff. del primo ordine (a coeff. variabili)

$$\boxed{u' + a(t)u = b(t)}$$

Formula per la soluzione generale: detta $A(t)$ una qualunque primitiva di $a(t)$

$$\boxed{u(t) = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{costante arbitraria}}}{c}\, e^{-A(t)} + e^{-A(t)} \underbrace{\int e^{A(s)} b(s)\,ds}_{\text{una qualunque primitiva}}}$$

Se in aggiunta ho una cond. iniziale $u(t_0) = u_0$, allora la soluzione del pbm. di Cauchy è

$$\boxed{u(t) = u_0 e^{-A(t)} + e^{-A(t)} \int_{t_0}^{t} e^{A(s)} b(s)\,ds}$$

ora ci sono gli estremi

dove $A(t)$ è LA primitiva di $a(t)$ che fa 0 in t_0, cioè

$$\boxed{A(t) = \int_{t_0}^{t} a(s)\,ds}$$

Conseguenza: si sa determinare la soluzione, a patto di saper fare le primitive di

$$a(t) \qquad \text{e} \qquad e^{A(t)} b(t).$$

Piano: ① Dim. che la formula funziona

② Dare due giustificazioni del perché viene in mente.

$\boxed{\text{Dim.}}$ $$u(t) = u_0 e^{-A(t)} + e^{-A(t)} \int_{t_0}^{t} e^{A(s)} b(s)\, ds$$

dove $A'(t) = a(t)$ e $A(t_0) = 0$.

Controllo il dato iniziale: $u(t_0) = u_0 \cdot e^0 + e^0 \cdot 0 = u_0$ ok.

Calcolo $u'(t)$:

$$u'(t) = u_0 e^{-A(t)} (-a(t)) - a(t) e^{-A(t)} \int_{t_0}^{t} e^{A(s)} b(s)\, ds + \cancel{e^{-A(t)}} \cancel{e^{A(t)}} b(t)$$

$$= -a(t) \left\{ u_0 e^{-A(t)} + e^{-A(t)} \int_{t_0}^{t} e^{A(s)} b(s)\, ds \right\} + b(t)$$

$$= -a(t) u(t) + b(t),$$

cioè $u(t)$ risolve l'equazione. $\square$

— o — o —

<u>Prima giustificazione</u>: metodo del $\boxed{\text{FATTORE INTEGRANTE}}$

$$u'(t) + a(t) u(t) = b(t)$$

Moltiplico LHS e RHS per $e^{A(t)}$ ← FATTORE INTEGRANTE

$$u'(t) e^{A(t)} + u(t) a(t) e^{A(t)} = b(t) e^{A(t)}$$

$$\left[u(t) e^{A(t)} \right]' = b(t) e^{A(t)}$$

Facendo la primitiva a dx e sx trovo

$$u(t) e^{A(t)} = \int b(s) e^{A(s)} ds + c$$

Per ricavare $u(t)$ moltiplico per $e^{-A(t)}$ e ottengo

$$u(t) = c\,e^{-A(t)} + e^{-A(t)} \int b(s)\, e^{A(s)}\, ds$$

che è la formula data.

— o — o —

<u>Seconda giustificazione</u>: $u'(t) + a(t)\,u(t) = b(t)$

La soluzione sarà del tipo $u(t) = \bar{u}(t) + \underbrace{c\,u_1(t)}$

sol. non omogenea

sol. dell'omogenea

Per calcolare $u_1(t)$ risolvo l'eq. omogenea:

$$u'(t) + a(t)\,u(t) = 0$$

che è variabili separabili: $u'(t) = -a(t)\,u(t)$

$$\rightsquigarrow \frac{du}{dt} = -a(t)\,u \rightsquigarrow \frac{du}{u} = -a(t)\,dt \rightsquigarrow \log|u| = -A(t)+c$$

$$|u(t)| = e^{-A(t)+c} \rightsquigarrow u(t) = \boxed{c\,e^{-A(t)}}$$

primo pezzo della formula generale

Ora cerco una soluzione speciale $\bar{u}(t)$ dell'eq. non omogenea con il metodo di variazione delle costanti

$$\bar{u}(t) = c(t)\,e^{-A(t)}$$

Calcolo $\bar{u}'(t) = c'(t)\,e^{-A(t)} - c(t)\,a(t)\,e^{-A(t)}$

Sostituisco nell'eq. non omogenea e ottengo

$$\underbrace{c'(t)e^{-A(t)} - \cancel{c(t)a(t)e^{-A(t)}}}_{\bar{u}'(t)} \underbrace{+ \cancel{a(t)c(t)e^{-A(t)}}}_{+a(t)\bar{u}(t)} = b(t)$$

resta $c'(t)e^{-A(t)} = b(t) \rightsquigarrow c'(t) = b(t)e^{A(t)}$

$$\rightsquigarrow c(t) = \int b(s)e^{A(s)}\,ds$$

$$\rightsquigarrow \bar{u}(t) = c(t)e^{A(t)} = \boxed{e^{A(t)}\int b(s)e^{A(s)}\,ds}$$

secondo pezzo della formula generale

Esempio 1 $\quad u' + tu = t^3 \qquad a(t) = t \rightsquigarrow A(t) = \frac{1}{2}t^2$

Fattore integrante: $e^{A(t)} = e^{\frac{1}{2}t^2}$

Moltiplico per il FI il LHS e il RHS:

$$\underbrace{u'e^{\frac{1}{2}t^2} + tue^{\frac{1}{2}t^2}} = t^3e^{\frac{1}{2}t^2}$$

$$\left[ue^{\frac{1}{2}t^2}\right]' = t^3e^{\frac{1}{2}t^2}$$

$$u(t)e^{\frac{1}{2}t^2} = \int t^3e^{\frac{1}{2}t^2}\,dt = \int t^2\cdot t\,e^{\frac{1}{2}t^2}\,dt$$

Pongo $y = \frac{1}{2}t^2$, quindi $dy = t\,dt$ $\quad = \int 2y\,e^y\,dy$

$$= 2\left[ye^y - \int e^y\,dy\right] = 2\left[ye^y - e^y\right] = 2e^y(y-1)$$

$$= 2e^{\frac{1}{2}t^2}\left(\frac{1}{2}t^2 - 1\right) + c$$

Ricavando: $\boxed{u(t) = ce^{-\frac{1}{2}t^2} + t^2 - 2}$ soluzione generale

Modo alternativo: omogenea + tentativo

$$u' + tu = t^3$$

① Risolvo l'omogenea: $u' + tu = 0$, $u' = -tu$

$\frac{du}{dt} = -tu \rightsquigarrow \frac{du}{u} = -t\,dt \rightsquigarrow \log|u| = -\frac{1}{2}t^2 + c$

$\rightsquigarrow |u(t)| = e^{-\frac{1}{2}t^2 + c} \rightsquigarrow u(t) = ce^{-\frac{1}{2}t^2}$

② Per risolvere la non omogenea, provo con il tentativo

$$u(t) = at^2 + bt + c \qquad u'(t) = 2at + b$$

Sostituisco nell'equazione e ottengo

$$\underbrace{2at + b}_{u'} + \underbrace{t(at^2 + bt + c)}_{+tu} = t^3$$

$a = 1$	coeff. di t^3	$a = 1$ e $c = -2$
$b = 0$	coeff. di t^2	quindi una soluzione
$2a + c = 0$	coeff. di t	speciale è
$b = 0$	termine noto	$u(t) = t^2 - 2$

—o —o —

Esempio 2 $\quad u' + u = 7$

Ci sono almeno 3 modi di risolverla:

① $u' = 7 - u$ e la consideriamo a variabili separabili

② Formula generale per equ. del 1° ordine

③ Lineare a coeff. costanti $\rightsquigarrow$ pol. caratt. + tentativo

$$u(t) = 7 + c\,e^{-t}$$

$x + 1 = 0 \rightsquigarrow x = -1$

ANALISI 1 - LEZIONE 080

Titolo nota 03/03/2015

Esempio 1 $u'' + 3u = 0$

Dimostrare che tutte le soluzioni sono limitate e periodiche

$x^2+3=0 \qquad x = \pm\sqrt{3}\, i$

Sol. gen.

$$u(t) = c_1 \cos(\sqrt{3}t) + c_2 \sin(\sqrt{3}t)$$

Fissati c_1 e c_2 sulla base dei dati iniziali, avremo

$$|u(t)| \le |c_1| + |c_2| \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

Oss. Una funzione del tipo $u(t) = a\cos(\omega t) + b \sin(\omega t)$ si può sempre scrivere come

$$u(t) = \underset{\substack{\uparrow\\ \text{ampiezza}}}{C} \sin(\omega t + \underset{\substack{\uparrow\\ \text{fase}}}{\varphi})$$

per opportuni C e φ (tra l'altro $C = \sqrt{a^2+b^2}$)

Dim. $a\cos(\omega t) + b\sin(\omega t) = \sqrt{a^2+b^2}\left\{ \underbrace{\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}}_{\sin\varphi} \cos(\omega t) + \underbrace{\frac{b}{\sqrt{\cdots}}}_{\cos\varphi} \sin(\;) \right\}$

Variante: $u'' + 3u = \sin(\alpha t)$. È vero che tutte le soluzioni sono limitate?

La soluzione generale sarà del tipo

$$u(t) = \underbrace{c_1 \sin(\sqrt{3}t) + c_2\cos(\sqrt{3}t)}_{\text{sol. gen. omog.}} + a\sin(\alpha t) + b\cos(\alpha t)$$

si determinano

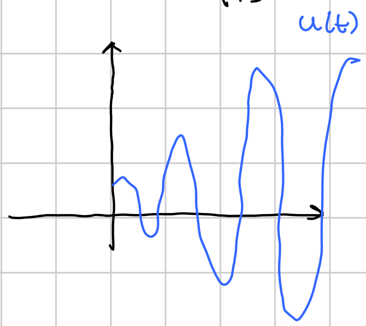
quindi se le cose vanno così la soluz. è limitata!

Le cose vanno così quando $\alpha \neq \pm\sqrt{3}$.
Se invece $\alpha = \pm\sqrt{3}$ la soluzione ha la t davanti:

$$u(t) = c_1 \sin(\sqrt{3}t) + c_2\cos(\sqrt{3}t) + at\sin(\alpha t) + bt\cos(\alpha t)$$

e questa ha oscillazioni di ampiezza crescente

$$u(t) = C\sin(\sqrt{3}t+\varphi) + C_1 t \sin(\alpha t+\varphi_1)$$



<u>Oss.</u> $u''+3u=0$ rappresenta un oscillatore
$u''+3u = f(t)$ rappresenta oscillazioni "forzate", cioè $f(t)$ è una "spinta".
Per produrre non limitatezza il termine forzante deve avere lo <u>stesso periodo</u> dell'oscillazione libera.

— o — o —

<u>Esempio 2</u> $u''+\alpha u' + 3u = 0$

Prima era $u'' = -3u$

$u'' = -3u - \alpha u'$

se α è positivo, questa rappresenta un attrito

Come sono fatte le soluzioni di $u''+\alpha u'+3u=0$?

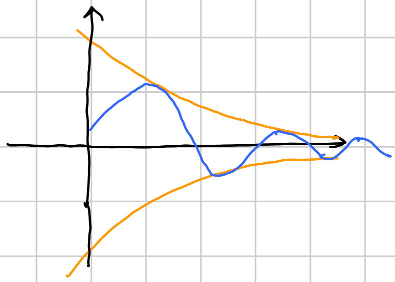
Dipende dal Δ del pol. caratteristico $x^2+\alpha x+3=0$

- Se $\Delta<0$, cioè $\alpha^2-12<0$, allora le radici sono compl. coniugate e quindi

$$u(t) = c_1 e^{at}\sin(\beta t) + c_2 e^{at}\cos(\beta t)$$

Quindi $a = -\frac{\alpha}{2}$. Se $\alpha > 0$ le soluzioni tendono a 0 per $t \to +\infty$ continuando ad oscillare

$$u(t) = e^{-\frac{\alpha}{2}t} C \sin(\beta t + \varphi)$$



- se $\Delta > 0$, cioè $\alpha^2 - 12 > 0$, allora le radici del pol. caratt. sono due numeri reali $\lambda < 0$ e $\mu < 0$ (il prodotto è 3, la somma è $-\alpha$), quindi la soluz. generale è

$$u(t) = c_1 e^{\lambda t} + c_2 e^{\mu t}$$

tendono a 0 senza oscillare

— o — o —

<u>Esempio 3</u> $\begin{cases} u' - 2u = \arctan t \\ u(0) = \alpha \end{cases}$

Domanda: come si comporta la soluzione al variare di α.

La formula esplicita NON si trova. Uso la formula generale

$$\boxed{u(t) = \alpha e^{2t} + e^{2t} \int_0^t e^{-2s} \arctan s \, ds}$$

Calcolare il limite per $t \to +\infty$

$$\lim_{t \to +\infty} \underbrace{e^{2t}}_{\downarrow \, +\infty} \left\{ \alpha + \underbrace{\int_0^t e^{-2s} \arctan s \, ds}_{\downarrow} \right\}$$

$$\int_0^{+\infty} e^{-2s} \arctan s \, ds = \text{integrale improprio}$$

L'integrale improprio converge perché

$$0 \le e^{-2s} \arctan s \le \frac{\pi}{2} e^{-2s} \rightsquigarrow \text{confronto}$$

Detto I_∞ = valore dell'integrale improprio, abbiamo 3 casi.

$\boxed{\text{Caso 1}}$ $\alpha + I_\infty > 0$, cioè $\alpha > -I_\infty$. In questo caso

$$\lim_{t \to +\infty} u(t) = +\infty$$

$\boxed{\text{Caso 2}}$ Se $\alpha < -I_\infty$, allora $\lim_{t \to +\infty} u(t) = -\infty$.

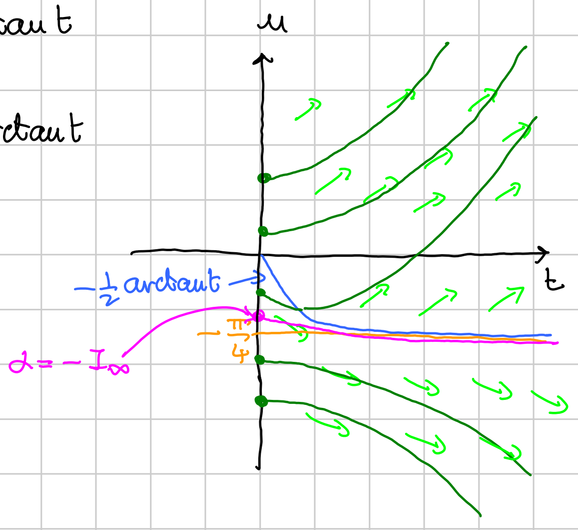
$\boxed{\text{Caso 3}}$ Se $\alpha = -I_\infty$, cioè $\alpha + I_\infty = 0$, allora il limite è una forma indeterminata $+\infty \cdot 0$ e lo calcoliamo con l'Hôpital

$$\lim_{t \to +\infty} u(t) = \lim_{t \to +\infty} \frac{\alpha + \int_0^t \cdots}{e^{-2t}} = \left[\frac{0}{0}\right]$$

$$= \lim_{t \to +\infty} \frac{\cancel{e^{-2t}} \arctan t}{-2\cancel{e^{-2t}}} = -\frac{\pi}{4}$$

Interpretazione $\quad u' = 2u + \arctan t$

$$2u + \arctan t > 0 \iff u > -\frac{1}{2}\arctan t$$



— o — o —

ANALISI 1 — LEZIONE 081

Titolo nota 04/03/2015

Sistemi di equazioni differenziali

Esempio 1 $\begin{cases} u' = 4u + 2v \\ v' = u + 3v \end{cases}$ Le incognite sono 2 funzioni $u(t)$ e $v(t)$

Il problema di Cauchy vuol dire fissare cond. iniziali per $u(t)$ e $v(t)$, ad esempio

$$u(0) = 2 \qquad v(0) = 3$$

stesso tempo

Idea: trasformare il sistema in una singola equazione in una sola incognita.

Derivo la prima eq.: $u'' = 4u' + 2v'$ (sostituisco v' dalla 2^a)

$= 4u' + 2u + 6v$ (cui procuro v dalla 1^a)

$= 4u' + 2u + 3u' - 12u$

$= 7u' - 10u$

Quindi ho ottenuto:

$$u'' - 7u' + 10u = 0$$

$x^2 - 7x + 10 = (x-2)(x-5) = 0 \qquad x = 2$ e $x = 5$

$u(t) = ae^{2t} + be^{5t}$. Ora trovo $v(t)$ sfruttando la 1^a:

$$v(t) = \frac{1}{2}u'(t) - 2u(t) = \frac{1}{2}(2ae^{2t} + 5be^{5t}) - 2ae^{2t} - 2be^{5t}$$

$$= -ae^{2t} + \frac{1}{2}be^{5t}$$

Conclusione: la sol. gen. del sistema è

$$\left.\begin{aligned} u(t) &= ae^{2t} + be^{5t} \\ v(t) &= -ae^{2t} + \frac{b}{2}e^{5t} \end{aligned}\right]$$

a e b sono gli stessi sopra e sotto

Se impongo $u(0) = 2$ e $v(0) = 3$ ottengo un sistema

$$\begin{cases} a+b = 2 \\ -a + \frac{b}{2} = 3 \end{cases}$$ ⤳ risolve

Fatto generale: un sistema di 2 eq. di ordine 1 ha dato origine ad una singola equ. di ordine 2. Sostanzialmente si sommano gli ordini.

Oss. 1 Le cose non cambiano se c'è dipendenza da t.

Oss. 2 Vale sempre il viceversa, cioè è sempre possibile trasformare una qualunque equ. di ordine k in un sistema di k equ. di ordine 1

$$u''' = 7u'' + 5uu' + e^t$$

$$\begin{cases} u' = v \\ v' = w \\ \underset{u'''}{w'} = 7\underset{u''}{w} + 5\underset{u}{u}\underset{u'}{v} + e^t \end{cases}$$

Moralmente: $u' = v$, $u'' = w$

Conseguenza: se ho una teoria di esistenza / unicità per i sistemi di ordine 1 ce l'ho per le equazioni e per i sistemi di ordine qualunque.

— o — o —

Torniamo al sistema di partenza:

$$\begin{cases} u' = 4u + 2v \\ v' = u + 3v \end{cases}$$

Possiamo pensare che l'incognita sia $U(t) = \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix}$

Ovviamente $U'(t) = \begin{pmatrix} u'(t) \\ v'(t) \end{pmatrix}$

Posso scrivere il sistema nella forma

$$\boxed{U'(t) = A\,U(t)} \quad \text{dove} \quad A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Autovalori di A: $\quad \mathrm{Tr}\,A = 7 \quad \mathrm{Det}\,A = 10 \qquad \lambda = 2$ e $\lambda = 5$

Pol. caratt. $\begin{pmatrix} 4-\lambda & 2 \\ 1 & 3-\lambda \end{pmatrix} = (4-\lambda)(3-\lambda) - 2$

$$= 12 - 7\lambda + \lambda^2 - 2 = \lambda^2 - 7\lambda + 10$$

Gli autovalori della matrice determinano le soluzioni del sistema,

Dagli autovalori si vede anche il comportamento qualitativo delle soluzioni (divergere a $\pm\infty$, convergere a 0, oscillare)

$$u(t) = a e^{2t} + b e^{5t}$$
$$v(t) = -a e^{2t} + \frac{b}{2} e^{5t}$$

$$U(t) = a \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}}_{\text{autovettore di } 2} e^{2t} + b \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}}_{\text{autovettore di } 5} e^{5t}$$

— o — o —

$$\begin{cases} u' = \lambda u + v \\ v' = \lambda v \end{cases} \qquad A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Dalla 2ª ottengo $v(t) = a e^{\lambda t}$ vado nella 1ª e trovo

$$u' = \lambda u + \underbrace{a e^{\lambda t}}_{\text{è sol. dell'omogenea, quindi}}$$

$$u(t) = c e^{\lambda t} + d\, t\, e^{\lambda t}$$

— o — o —

<u>Oss.</u> Brutalmente, se fosse $u'(t) = a\,u(t)$ la sol. sarebbe
$$u(t) = c e^{at}$$

Quando è

$$\underset{\text{vett.}}{U'(t)} = \underset{\text{matr.}}{A}\,\underset{\text{vett.}}{U(t)} \quad \text{la sol. è} \quad \underset{\text{vettore}}{U(t)} = \underset{e^{\text{Matrice}}}{e^{At}}\,\underset{\text{vetto}}{C}$$

$$e^A = I + A + \frac{1}{2}A^2 + \frac{1}{3!}A^3 + \dots$$

Si calcola facilmente se A è diagonale, altrimenti si diagonalizza

— o — o —

Esempio 2 Trovare per quali $\lambda \in \mathbb{R}$ esiste una soluzione dell' eq. diff

$$u'' = \lambda u$$

che verifica le condizioni

$$u(0) = u(1) = 0 \quad \text{(non è pbm. di Cauchy)}$$

Voglio anche che $u(t)$ non sia identicamente nulla

$\boxed{\lambda > 0}$ $u(t) = a \cosh(\sqrt{\lambda}t) + b \sinh(\sqrt{\lambda}t)$

Impongo $u(0) = u(1) = 0$. Ottengo

$u(0) = 0 \iff a = 0$

$u(1) = 0 \iff b \underbrace{\sinh(\sqrt{\lambda})}_{\neq 0} = 0 \implies b = 0$

$\implies$ l' unica possibilità è $u(t) \equiv 0$

$\boxed{\lambda < 0}$ $u(t) = a \sin(\sqrt{-\lambda}t) + b \cos(\sqrt{-\lambda}t)$

$u(0) = 0 \iff b = 0$

$u(1) = 0 \iff a \sin(\sqrt{-\lambda}) = 0$

Quindi ho 2 possibilità:

- $a = 0$, ma allora $u(t) \equiv 0$
- $\sin(\sqrt{-\lambda}) = 0$ e questo è possibile $\iff \sqrt{-\lambda} = k\pi$ $\iff \lambda = -k^2\pi^2 \quad k \in \mathbb{Z}$

In tal caso ho infinite soluzioni della forma

$$u(t) = a \sin(\sqrt{-\lambda}t) = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{qualunque}}}{a} \sin(k\pi t)$$

$\boxed{\lambda = 0}$ La soluz. generale è $u(t) = a + bt$

$u(0) = 0 \iff a = 0$

$u(1) = 0 \iff b = 0$

Anche qui l'unica soluzione è quella nulla $u(t) \equiv 0$

— o — o —

ANALISI 1 — LEZIONE 082

Titolo nota 04/03/2015

Esercizio 1 $\begin{cases} u' = u^4 \\ u(0) = \alpha \end{cases}$ Disegnare le soluzioni dell'equ.

$$\frac{du}{dt} = u^4 \rightsquigarrow \frac{du}{u^4} = dt \rightsquigarrow \int \frac{du}{u^4} = \int dt \rightsquigarrow -\frac{1}{3}\frac{1}{u^3} = t + c$$

$$\rightsquigarrow \frac{1}{u^3} = -3t + c \rightsquigarrow u^3(t) = \frac{1}{c-3t} \rightsquigarrow u(t) = \frac{1}{\sqrt[3]{c-3t}}$$

Impongo $u(0) = \alpha$ e ottengo $\alpha = \frac{1}{\sqrt[3]{c}} \rightsquigarrow c = \frac{1}{\alpha^3}$

$$\boxed{u(t) = \frac{\alpha}{\sqrt[3]{1-3\alpha^3 t}}}$$ Soluzione del pbm. di Cauchy

Nota bene: la formula è OK anche per $\alpha = 0$.

Come è fatta dipende da α. Ci sono 3 casi

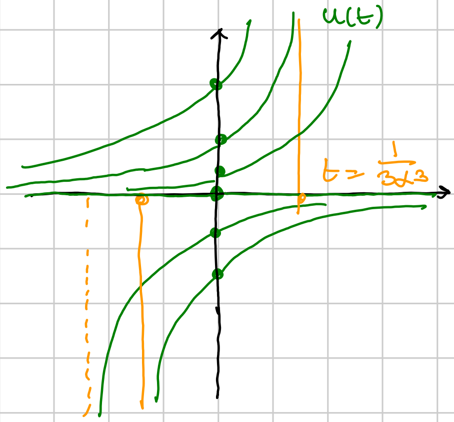
$\boxed{\alpha = 0}$ È la soluzione $u(t) \equiv 0$

$\boxed{\alpha > 0}$ C'è blow-up per $1 - 3\alpha^3 t = 0$, cioè $t = \frac{1}{3\alpha^3}$

Essendo l'eq. autonoma tutte le soluzioni con $\alpha > 0$ si ottengono traslando dx - sx la stessa

Il tempo di vita $\to 0$ per $\alpha \to +\infty$

" " " " " $+\infty$ per $\alpha \to 0$



$\boxed{\alpha < 0}$ La situazione si ribalta, cioè $u(t)$ non ha problemi per $t \to +\infty$ (tende a 0) e ha blow-up nel passato sempre per $t = \frac{1}{3\alpha^3}$ che ora è negativo.

Formalizziamo la simmetria alto / basso.

Se $u(t)$ è soluzione, allora anche $-u(-t)$ è soluzione

$\boxed{\text{Dim.}}$ Pongo $v(t) = -u(-t)$. Allora

$$v'(t) = u'(-t) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{equ. diff.}}}{=} u^4(-t) = v^4(t)$$

quindi $v(t)$ risolve la stessa equ. con dato iniziale cambiato di segno $v(0) = -u(0)$

Volendo dim. che le soluzioni con $\alpha > 0$ sono convesse, senza calcolare la u'' dalla formula, basta usare l'equazione:

$$u' = u^4 \rightsquigarrow u'' = 4u^3 u' \underset{\substack{\uparrow \\ u' = u^4}}{=} 4u^7 > 0 \quad \text{se } u > 0$$

— o — o —

Esempio 2 $\begin{cases} u' = u^4 \cdot e^{-t} \\ u(0) = \alpha > 0 \end{cases}$ Capire se c'è blow-up

$$\frac{du}{u^4} = e^{-t}\,dt \rightsquigarrow -\frac{1}{3}\frac{1}{u^3} = -e^{-t} + c \rightsquigarrow \frac{1}{u^3} = 3e^{-t} + c$$

$\rightsquigarrow u(t) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{3e^{-t}+c}}$. Impongo la cond. iniziale

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt[3]{3+c}} \rightsquigarrow 3 + c = \frac{1}{\alpha^3} \rightsquigarrow c = \frac{1}{\alpha^3} - 3$$

$$u(t) = \frac{1}{\sqrt[3]{3e^{-t} + \frac{1}{\alpha^3} - 3}} = \boxed{\frac{\alpha}{\sqrt[3]{1 + 3\alpha^3(e^{-t} - 1)}}}$$

Da cosa dipende il blow-up per $t \geq 0$? Dall'annullarsi del denom. per $t \geq 0$

$$1+3\alpha^3(e^{-t}-1) \geq 0 \iff e^{-t}-1 \geq -\frac{1}{3\alpha^3} \iff e^{-t} \geq \boxed{1-\frac{1}{3\alpha^3}}$$

varia tra 0 e 1 quando $t \geq 0$

se $\alpha > 0$, questo è < 1

Resta da imporre $1-\frac{1}{3\alpha^3} > 0 \iff 3\alpha^3 > 1 \iff \alpha > \frac{1}{\sqrt[3]{3}} = \alpha_0$

Quindi abbiamo 3 casi

$\boxed{\alpha > \alpha_0}$ $1-\frac{1}{3\alpha^3} \in (0,1)$, quindi esiste $t > 0$ t.c. denom $= 0$, quindi c'è blow-up

$\boxed{0 < \alpha < \alpha_0}$ $1-\frac{1}{3\alpha^3} < 0 \Rightarrow$ non c'è blow up per $t \geq 0$

$\boxed{\alpha = \alpha_0}$ Comunque $1-\frac{1}{3\alpha^3} = 0$, quindi no blow-up

Per $\alpha = \alpha_0$ la soluzione tende a $+\infty$

Per $\alpha < \alpha_0$ la soluzione ha limite finito.

— o — o —

Esempio 3 $\begin{cases} u' - \frac{2}{t}u = t^3 \\ u(1) = \alpha \end{cases}$

$a(t) = -\frac{2}{t} \rightsquigarrow A(t) = -2\log t \rightsquigarrow$ FATT. INT. $= e^{A(t)} = \frac{1}{t^2}$

Moltiplico per $\frac{1}{t^2}$: $\underbrace{\frac{u'}{t^2} - \frac{2}{t^3}u}_{} = t$

$$\left(\frac{u}{t^2}\right)' = t \rightsquigarrow \frac{u}{t^2} = \frac{1}{2}t^2 + c$$

$$\boxed{u(t) = \boxed{\frac{1}{2}t^4} + c\,t^2}$$ Soluzione generale

solus. dell' omogenea

soluzione della non omogenea

Burocraticamente, nel passato (risp. a $t=1$) c'è break down per $t=0$, perché lì l'eq. non ha senso.
In maniera più elastica, $u \in C^1(\mathbb{R})$ e risolve l'equ. per ogni $t \neq 0$

— o — o —

<u>Esempio 4</u> $u'' + u = f(t)$
Trovare la formula generale.
Cerco una sol. speciale per variazione delle costanti

$$u(t) = a(t)\sin t + b(t)\cos t$$

$$u'(t) = \underbrace{a'(t)\sin t} + a(t)\cos t + \underbrace{b'(t)\cos t} - b(t)\sin t$$

$$\boxed{a'(t)\sin t + b'(t)\cos t = 0}$$ 1ª equ.

$u''(t)$ $\quad a'(t)\cos t - \cancel{a(t)\sin t} - b'(t)\sin t - \cancel{b(t)\cos t}$
$+u(t)$ $\quad + \cancel{a(t)\sin t} + \cancel{b(t)\cos t}$
$= f(t)$ $\quad = f(t)$

$$\boxed{a'(t)\cos t - b'(t)\sin t = f(t)}$$ 2ª equ.

1ª. $\sin t$ + 2ª. $\cos t$ $\rightsquigarrow$ $a'(t) = f(t)\cos t$
1ª. $\cos t$ − 2ª. $\sin t$ $\rightsquigarrow$ $b'(t) = -f(t)\sin t$

Conclusione

$$u(t) = a(t)\sin t + b(t)\cos t$$

$$= \boxed{\sin t \int f(s)\cos s\, ds - \cos t \int f(s)\sin s\, ds + c_1 \sin t + c_2 \cos t}$$

Si vede ad esempio che, se $f(t) = \sin t$ o $\cos t$, allora uno dei due integrali diverge per $t \to +\infty$ (RISONANZA).

— o — o —

ANALISI 1 – LEZIONE 083

Titolo nota 06/03/2015

		Teoria	Es.
1	Successioni per ricorrenza	5 %	95 %
2	Liminf / limsup	60%	40%
3	Completezza / Compattezza	90%	10%
4	Da Weierstrass a Taylor	90%	10 %
5	Uniforme continuità e moduli di cont.	50%	50 %
6	Funzioni convesse	60 %	40 %
7	Varie ed eventuali	?	?

— o — o —

SUCCESSIONI PER RICORRENZA

$x_{n+1} = 2x_n + 3$ ← permette di calcolare un termine noto il termine precedente

$x_0 = 5$ ← grazie a questo valore calcolo i successivi.

$x_{n+1} = x_n + x_{n-1}^2$ noti 2 valori iniziali x_0 e x_1

↑ ordine 2, cioè dipende da 2 termini precedenti

$x_{n+1} = 2x_n + \boxed{3^n}$ ← succ. per ricorrenza di ordine 1 non autonoma (cioè la legge di passaggio varia al variare di n)

$x_{n+1} = f(x_n)$ succ. per ric. di ordine 1 autonoma

$x_{n+1} = f(x_n, n)$ " " " " " " non autonoma

$x_{n+1} = f(x_n, x_{n-1}, n)$ " " 2 " "

Obiettivi:

1. Trovare la formula generale (chiusa) per calcolare x_n senza dover calcolare tutti i precedenti
2. Studiare la successione (capire monotonia, limite, ...) senza avere la formula chiusa.

$\boxed{\text{Caso Lineare}}$

<u>Esempio 1</u> $x_{n+1} = 7x_n \rightsquigarrow x_1 = 7x_0,\ x_2 = 7x_1 = 7^2 x_0, \ldots$

$$x_n = 7^n x_0 \quad \leftarrow \text{banale induzione}$$

$$x_{n+1} = k\,x_n \rightsquigarrow x_n = k^n x_0$$

<u>Esempio 2</u> $x_{n+2} = 3x_{n+1} + 4x_n$

Provo a vedere se ci sono succ. esponenziali che la risolvono

$x_n = k^n$. Sostituisco: $k^{n+2} \overset{?}{=} 3k^{n+1} + 4k^n$

Semplifico k^n e trovo $k^2 = 3k + 4$, cioè

$k^2 - 3k - 4 = 0 \qquad (k-4)(k+1) = 0 \rightsquigarrow k = 4$ e $k = (-1)$

Ci sono due succ. esponenziali che vanno bene

$4^n,\ (-1)^n$ Ma allora va bene anche

$a\,4^n + b(-1)^n$ con a e b costanti reali qualunque (sostituire per credere)

Ci sono altre soluzioni ?

No! Per 2 osservazioni

<u>Oss. 1</u> Ogni soluzione è univocamente determinata se conosco x_0 e x_1

<u>Oss. 2</u> Esiste una succ. del tipo $a \cdot 4^n + b \cdot (-1)^n$ che prende una qualunque coppia iniziale x_0 e x_1. Perché ?

$$\begin{array}{ll} n=0 & a + b = x_0 \\ n=1 & 4a - b = x_1 \end{array} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{Det} \neq 0.$$

Teoria generale: Data una ricorrenza lineare di ordine 2

$$\boxed{x_{n+2} = a\, x_{n+1} + b\, x_n}$$

la soluzione generale è del tipo

$$\boxed{x_n = c_1 \lambda^n + c_2 \mu^n}$$

dove λ e μ sono le radici del polinomio caratteristico

$$\boxed{x^2 - ax - b}$$

Questo vale se le radici λ e μ sono distinte.

Dim. STEP 1: Tutte le x_n come sopra funzionano (banale sostituzione)

STEP 2: Fissati x_0 e x_1 esistono unici c_1 e c_2 per cui x_n prende quei valori iniziali.
Si tratta di risolvere il sistema

$$\begin{array}{l} n=0 \\ n=1 \end{array} \begin{cases} c_1 + c_2 = x_0 \\ \lambda c_1 + \mu c_2 = x_1 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda & \mu \end{pmatrix} \quad \text{Det} \neq 0 \text{ se } \lambda \neq \mu$$

— o — o —

La stessa cosa vale per ricorrenze di ogni ordine purché le radici del polinomio caratteristico siano distinte.

— o — o —

Le molteplicità si trattano mettendo n davanti come nelle equazioni differenziali.

Esempio $x_{n+2} = 6x_{n+1} - 9x_n \quad \rightsquigarrow \quad x^2 - 6x + 9 = 0$
$\rightsquigarrow \quad x = 3$ con molt $= 2$

$$x_n = c_1 3^n + c_2\, n\, 3^n \quad \text{(sostituire e fare step 2 per credere)}$$

Esempio $a_{n+2} = a \cdot a_{n+1} + b \cdot a_n$

$\boxed{\text{Approccio algebrico}}$ Invece di considerare a_n come incognita, considero (a_n, a_{n+1}) come incognita.
Anzi considero come incognita il polinomio

$$p_n(x) = a_n + a_{n+1} x$$

$$p_{n+1}(x) = a_{n+1} + a_{n+2} x$$

$$x p_n(x) = a_n x + a_{n+1} x^2$$ Nel caso di fibonacci $x^2 = x+1$

$$\equiv a_n x + a_{n+1} x + a_{n+1}$$
$$= (a_n + a_{n+1}) x + a_{n+1}$$
$$= a_{n+2} x + a_{n+1}$$

Quindi nel caso di Fibonacci $p_{n+1}(x) \equiv x \cdot p_n(x) \pmod{x^2-x-1}$
Quindi $p_n(x) \equiv x^n p_0(x) \pmod{x^2-x-1}$, cioè
$p_n(x) = x^n p_0(x) + q(x)(x^2-x-1)$. Sostituendo a x le 2 radici del polinomio riesco a determinare $p_n(x)$.

— o — o —

$\boxed{\text{Approccio matriciale}}$ $a_{n+2} = a \cdot a_{n+1} + b \cdot a_n$

Considero come incognita il vettore $v_n = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix}$. Allora

$$v_{n+1} = \begin{pmatrix} a_{n+2} \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cdot a_{n+1} + b\, a_n \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix}$$
$$= A \cdot v_n$$

Quindi il vettore v_n è soluzione di $v_{n+1} = A \cdot v_n$, da cui banalmente

$$v_n = A^n v_0$$ $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_0 \end{pmatrix}$

Per calcolare la potenza basta diagonalizzare, cioè esiste M matrice invertibile tale che

$$M^{-1} A M = \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}}_{\text{radici di } x^2 - ax - b = 0} \quad , \text{ quindi } A = M \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} M^{-1}$$

quindi $A^n = M \begin{pmatrix} \lambda^n & 0 \\ 0 & \mu^n \end{pmatrix} M^{-1}$, da cui la formula.

Se λ è radice di molteplicità 2, allora

$$M^{-1} A M = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

se la elevo alla n ottengo $\begin{pmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ 0 & \lambda^n \end{pmatrix}$

n dovuto alla molt.

— o — o —

ANALISI 1 — LEZIONE 084

Titolo nota 06/03/2015

Ancora succ. per ricorrenza lineari

Sistema
$$\begin{cases} a_{n+1} = 3a_n + b_n \\ b_{n+1} = 2a_n - 5b_n \end{cases}$$

Shifto la 1ª di 1:
$$\begin{aligned} a_{n+2} &= 3a_{n+1} + b_{n+1} && (b_{n+1} \text{ dalla } 2^a) \\ &= 3a_{n+1} + 2a_n - 5b_n && (b_n \text{ dalla } 1^a) \\ &= 3a_{n+1} + 2a_n + 15a_n - 5a_{n+1} \\ &= -2a_{n+1} + 17a_n \end{aligned}$$

e da qui è fatta.

Teoria generale: Sia V lo spazio vettoriale delle successioni di numeri reali. Considero la funzione
$$L : V \to V$$
definita così
$$L(\{x_n\}) = \{x_{n+2} - a x_{n+1} - b x_n\}$$

Allora x_n verifica la ricorrenza $x_{n+2} = a x_{n+1} + b x_n$ se e solo se $\{x_n\} \in \ker L$ (L è ovviamente lineare).

Quindi l'insieme delle succ. che verificano la ricorrenza è uno spazio vettoriale e ha dimensione 2 (basta fissare 2 dati iniziali).
Se l'ordine è k la dim. è k.

— o — o —

Caso non omogeneo

non omogeneo

Esempio $x_{n+1} = a x_n + b$

$\boxed{1^o \text{ metodo : bovino puro}}$

$x_1 = a x_0 + b$

$x_2 = a x_1 + b = a^2 x_0 + ab + b$

$x_3 = a x_2 + b = a^3 x_0 + a^2 b + ab + b$

Congettura

$$x_n = a^n x_0 + b(1 + a + \dots + a^{n-1}) = a^n x_0 + b \frac{a^n - 1}{a - 1}$$

Formula generale $\boxed{x_n = a^n x_0 + b \frac{a^n - 1}{a - 1}}$ per $a \neq 1$, ma se $a = 1$ è proprio banale

$\boxed{\text{Dim.}}$ Induzione formale sulla formula congetturata

$\boxed{2^o \text{ metodo, più elegante}}$ Cambio variabile da x_n e pongo

$$\boxed{y_n = x_n - \ell}$$

Cosa risolve y_n?

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= x_{n+1} - \ell \\ &= a x_n + b - \ell \qquad (x_n = y_n + \ell) \\ &= a y_n + a\ell + b - \ell \end{aligned}$$

cioè

$$y_{n+1} = a y_n + \underbrace{a\ell + b - \ell}_{\text{impongo che sia } 0 \;:\; \ell = \frac{b}{1-a}}$$

$$y_{n+1} = a y_n \rightsquigarrow \underset{\substack{\downarrow \\ x_n - \ell}}{y_n} = a^n y_0 = a^n (x_0 - \ell)$$

$x_n - \ell = a^n (x_0 - \ell) \rightsquigarrow$ sostituendo il valore di ℓ trovo la stessa formula di prima.

$\boxed{3^\circ \text{ metodo}}$ Dalla teoria generale delle equ. lineari non omogenee mi aspetto una formula del tipo

$$x_n = \underbrace{y_n}_{\substack{\text{sol. gen. omogenea} \\ \downarrow \\ x_{n+1} = a x_n \\ \downarrow \\ c\, a^n}} + \underbrace{z_n}_{\substack{\text{soluzione speciale} \\ \text{della non omogenea}}}$$

La soluzione z_n speciale basta cercarla costante

$x_{n+1} = a x_n + b$ cerco una costante ℓ tale che

$\ell = a \ell + b \quad \rightsquigarrow \quad \ell = \dfrac{b}{1-a}$

$\Rightarrow$ soluzione generale $\quad x_n = \underbrace{c \cdot a^n}_{y_n} + \underbrace{\dfrac{b}{1-a}}_{z_n}$

Se impongo $x_0 = c + \dfrac{b}{1-a}$ trovo c e viene la solita formula di prima.

<u>Esempio 2</u> $\quad x_{n+1} = 2 x_n + n^2 + 3^n$

Stile 3° metodo, la soluzione sarà del tipo $x_n = c \cdot 2^n + \underbrace{z_n}_{\text{sol. speciale}}$

Cerco z_n del tipo $\quad z_n = a n^2 + b n + c + d \cdot 3^n$. Sostituisco

$$a(n+1)^2 + b(n+1) + c + d \cdot 3^{n+1} = 2 a n^2 + 2 b n + 2c + 2d\, 3^n + n^2 + 3^n$$

$3d = 2d + 1$

$a + b + c = 2c$ termine noto

$2a + b = 2b$ coeff. di n

$a = 2a + 1$ coeff. di n^2

Risolvendo trovo a, b, c, d.

Esempio 3 $\quad x_{n+2} = 7x_{n+1} - 12x_n + 3^n$

Parte omogenea: $\quad x_{n+2} = 7x_{n+1} - 12x_n \rightsquigarrow x^2 - 7x + 12 = 0$
$\rightsquigarrow x = 3$ e $x = 4$

$$\boxed{c_1 3^n + c_2 4^n}$$ Soluzione generale omogenea

La soluzione speciale non posso cercarla del tipo $z_n = a \cdot 3^n$
perché 3^n risolve già l'omogenea.
Quindi la cerco del tipo

$$z_n = a \cdot n 3^n$$

$$a(n+2)\cancel{3^{n+2}} = 7a(n+1)\cancel{3^{n+1}} - 12an\cancel{3^n} + \cancel{3^n}\,1$$

$$\cancel{9an} + 18a = \cancel{21an} + 21a - \cancel{12an} + 1 \rightsquigarrow 3a = -1$$
$$\rightsquigarrow a = -\frac{1}{3}$$

Quindi la soluzione generale è $\quad x_n = c_1 3^n + c_2 4^n - \frac{1}{3} n 3^n$

— o — o —

Oss. Le radici del pol. caratteristico possono venire numeri complessi. Allora ci sono 2 opzioni

1 – tenerseli, ma consapevoli che le i se ne devono andare se tutti i coeff. e i dati iniziali sono reali

2 – posto $\lambda = \rho e^{i\theta}$ $\quad \mu = \rho e^{-i\theta}$, allora invece di usare come base λ^n e μ^n posso usare

$$\rho^n \cos(n\theta) \qquad\qquad \rho^n \sin(n\theta)$$

— o — o —

ANALISI 1 — LEZIONE 085

Titolo nota 10/03/2015

<u>Ritorno al passato</u>: metodo del polinomio per la formula esplicita per

$$a_{n+2} = a\, a_{n+1} + b\, a_n$$

Idea: penso come incognita la coppia (a_n, a_{n+1}), anzi il polinomio

$$p_n(x) = b\, a_n + a_{n+1} x$$

Infatti ragionando modulo $x^2 - ax - b$ (quindi $x^2 \equiv ax + b$)

$$x p_n(x) = b a_n x + a_{n+1} x^2 \equiv b a_n x + a_{n+1} \cdot a x + a_{n+1} \cdot b$$

$$= b a_{n+1} + \underbrace{(b a_n + a\, a_{n+1})}_{a_{n+2}} x = b a_{n+1} + a_{n+2} x = p_{n+1}(x)$$

Morale: $p_{n+1}(x) \equiv x p_n(x) \pmod{x^2 - ax - b}$ e quindi per induzione

$$p_n(x) \equiv x^n p_0(x) \pmod{x^2 - ax - b}$$

cioè

$$p_n(x) = x^n p_0(x) + q_n(x)(x^2 - ax - b) \qquad (\star)$$

Come calcolo $p_n(x)$? Se $\mu \neq \lambda$ sono le radici del pol. caratt. sostituisco

$$x = \lambda \rightsquigarrow \underbrace{b a_n + a_{n+1} \lambda}_{p_n(\lambda)} = \lambda^n \underbrace{(b a_0 + a_1 \lambda)}_{p_0(\lambda)}$$

$$x = \mu \rightsquigarrow b a_n + a_{n+1} \mu = \mu^n (b a_0 + a_1 \mu)$$

sistema nelle incognite a_n e a_{n+1} con det $\neq 0$ $\rightsquigarrow$ trovo a_n e a_{n+1}

Se invece λ è radice unica di molt. 2, allora $x = \lambda$ come prima, poi derivando la $(\star)$ otteniamo

$$\underset{\substack{\uparrow \\ [p_n(x)]'}}{a_{n+1}} = n x^{n-1} p_0(x) + x^n p_0'(x) + q_n'(x)(x^2 - ax - b) + q_n(x)(2x - a)$$

Sostituendo $x = \lambda$ si ha la formula per a_{n+1}

— o — o —

SUCCESSIONI PER RICORRENZA NON LINEARI

Caso autonomo : $x_{n+1} = f(x_n)$

<u>Esempio 1</u> $\begin{cases} x_{n+1} = x_n^2 \\ x_0 = \frac{3}{4} \end{cases}$ → Volendo si potrebbe ottenere una formula esplicita (esercizio!)

Domande: trovare il limite e "il comportamento" senza usare la formula esplicita

$\boxed{\text{PIANO}}$ (i) $0 \leq x_n \leq \frac{3}{4}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$
(ii) $x_{n+1} \leq x_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$
(iii) $x_n \to \ell \in \mathbb{R}$
(iv) $\ell = 0$

] Piano standard con la monotonia

Ora dovrei dim. (i), (ii), (iii), (iv) nell'ordine, usando ogni volta solo le cose precedentemente dimostrate.

$\boxed{\text{Dim (iii)}}$ Dati per buoni (i) e (ii), segue dal teo. succ. monotone (deb. decrescente + limitata dal basso ⇒ esiste limite in $\mathbb{R}$)

$\boxed{\text{Dim (iv)}}$ Sapendo già che $x_n \to \ell$, passo al limite nella ricorrenza

$$\begin{array}{ccc} x_{n+1} & = & x_n^2 \\ \downarrow & & \downarrow \\ \ell & = & \ell^2 \end{array} \quad \rightsquigarrow \quad \ell = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}$$

Ma $\ell = 1$ è incompatibile con (i), quindi per forza $\ell = 0$.

<u>Oss.</u> Se al p.to (i) ci fosse stato $0 \leq x_n < 1$, questo NON bastava per escludere $\ell = 1$ (le disuguaglianze strette NON passano al limite)

↑ pensare a $\frac{1}{n} > 0$, ma $\frac{1}{n} \to 0$

$\boxed{\text{Dim (ii)}}$ $\boxed{\text{Ricorrenza + disequazione}}$

$x_{n+1} \overset{?}{\leq} x_n \rightsquigarrow x_n^2 \leq x_n$ questa è vera $\overset{\text{precorso}}{\Longleftrightarrow} x_n \in [0,1]$

ricorrenza

Per il p.to (i) so già che $x_n \in [0, \frac{3}{4}]$, quindi a maggior ragione $x_n \in [0,1]$

$\boxed{\text{Dim (i)}}$ Induzione: ovvio per $n=0$

$\boxed{\text{P.I}}$ Ipotesi: $0 \leq x_n \leq \frac{3}{4}$ Tesi: $0 \leq x_{n+1} \leq \frac{3}{4}$

Dim. prendo l'ipotesi e faccio il quadrato (senza cambiare i versi perché $f(x) = x^2$ è strett. cresc. nella zona in questione)

$$0 \leq x_n^2 \leq \frac{9}{16}$$

$$0 \leq x_{n+1} \leq \frac{9}{16} \leq \frac{3}{4} \quad \text{quindi ok.}$$

— o — o —

Dim. alternativa della monotonia: $\boxed{\text{Induzione + applico } f}$

Dimostro che $x_{n+1} \leq x_n$ per induzione

Passo base: $x_1 \leq x_0$ sì perché $\frac{9}{16} \leq \frac{3}{4}$

Passo induttivo: Ipotesi: $x_{n+1} \leq x_n$ Tesi $x_{n+2} \leq x_{n+1}$

Dim. prendo l'ipotesi e applico $f(x) = x^2$. Essendo fatto per $x \geq 0$ (grazie al p.to (i)) posso conservare i versi

$$x_{n+1} \leq x_n \Rightarrow x_{n+1}^2 \leq x_n^2$$

$$x_{n+2} \leq x_{n+1}, \text{ cioè la tesi}$$

— o — o —

Esempio 2 $\begin{cases} x_{n+1} = x_n^2 \\ x_0 = 3 \end{cases}$ $x_0 = 3,\ x_1 = 9,\ x_2 = 81,\ x_3 = 81^2 \ldots$

$\boxed{\text{PIANO}}$ (i) $x_n \geq 3$ per ogni $n \in \mathbb{N}$

(ii) $x_{n+1} \geq x_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$

(iii) $x_n \to \ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$

(iv) $\ell = +\infty$

$\boxed{\text{Dim (i)}}$ Induzione (applicando $f(x) = x^2$)

$\boxed{\text{Dim (ii)}}$ 1° modo: ricorrenza più disequazione

$$x_{n+1} \geq x_n \underset{\substack{\uparrow \\ \text{ricorrenza}}}{\Longleftrightarrow} x_n^2 \geq x_n \underset{\substack{\uparrow \\ \text{percorso: valori} \\ \text{esterni}}}{\Longleftrightarrow} x_n \in (-\infty, 0] \cup [1, +\infty)$$

Sapendo che $x_n \geq 3$ dal p.to (i), automaticamente $x_{n+1} \geq x_n$

2° modo: induzione + applico $f(x) = x^2$

Passo base: $x_1 \geq x_0$ ok perché $9 \geq 3$

Passo induttivo: ipotesi $x_{n+1} \geq x_n$, applico semplicemente $f(x) = x^2$ (dopo aver spiegato perché posso) e ottengo

$$x_{n+1}^2 \geq x_n^2, \quad \text{cioè} \quad x_{n+2} \geq x_{n+1} \quad \text{che è la tesi}$$

$\boxed{\text{Dim (iii)}}$ (ii) + teo. succ. monotone (ora non ho limitazione dall'alto, quindi il limite può essere in $\mathbb{R}$ o $+\infty$)

$\boxed{\text{Dim (iv)}}$ Se per assurdo fosse $\ell \in \mathbb{R}$, potrei passare al limite nella ricorrenza

$$\begin{array}{ccc} x_{n+1} & = & x_n^2 \\ \downarrow & & \downarrow \\ \ell & = & \ell^2 \end{array} \qquad \ell = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}$$

entrambi incompatibili con (i), quindi resta solo $\ell = +\infty$

Esempio 3 $\begin{cases} x_{n+1} = \sqrt{3x_n + 4} \\ x_0 = 2015 \end{cases}$

$\boxed{\text{PIANO}}$ (i) $4 \leq x_n \leq 2015$ per ogni $n \in \mathbb{N}$

(ii) $x_{n+1} \leq x_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$

(iii) $x_n \to \ell \in \mathbb{R}$ ((i) + (ii) + teo. succ. monot.)

(iv) $\ell = 4$

$\boxed{\text{Dim. (iv)}}$ Passo al limite nella ricorrenza (posso per (iii))

$$\begin{array}{ccc} x_{n+1} & = & \sqrt{3x_n+4} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \ell & = & \sqrt{3\ell+4} \end{array} \rightsquigarrow \text{risolvo } \ell^2 = 3\ell+4 \rightsquigarrow \ell = \begin{cases} 4 \\ -1 \end{cases}$$

Non accettabile come soluz. dell' eq.

quindi per forza $\ell = 4$.

$\boxed{\text{Dim di (i)}}$ Induzione $n = 0$ OK

$\boxed{\text{Pass. induttivo}}$ $4 \leq x_n \leq 2015$ per ipotesi. Applico $f(x) = \sqrt{3x+4}$ che è una funzione crescente e ottengo

$$\begin{array}{ccccccc} f(4) & \leq & f(x_n) & \leq & f(2015) & & \\ \| & & \| & & & & \\ 4 & \leq & x_{n+1} & \leq & \sqrt{6049} & \leq & 2015 \end{array}$$

che è la tesi

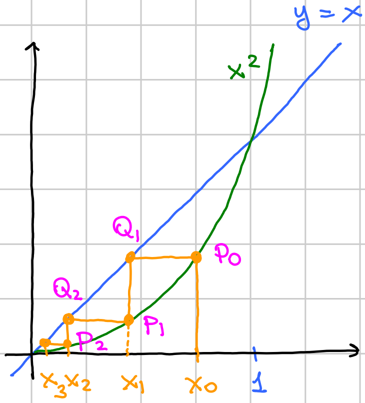
$\boxed{\text{Dim (ii)}}$ Modo più veloce: induzione + applico $f(x)$ che è crescente nella zona in questione

ANALISI 1 – LEZIONE 086

Titolo nota 10/03/2015

Interpretazione grafica delle succ. per ricorrenza autonome

$x_{n+1} = f(x_n)$ $\quad (x_{n+1} = x^2)$



- Disegno il grafico di $f(x)$ e la bisettrice $y = x$
- Disegno il dato x_0 sull'asse x
- Seguo lo SLOGAN: verticale alla funzione, orizzontale alla bisettrice
- Le ascisse dei p.ti che trovo sono $x_1, x_2, x_3, \dots$

Chi sono i p.ti $P_0, Q_1, P_1, Q_2, P_2, \dots$?

stessa di P_0

$P_0 = (x_0, f(x_0)) = (x_0, x_1)$; $\quad Q_1 = (x_1, x_1)$

è uguale alla seconda

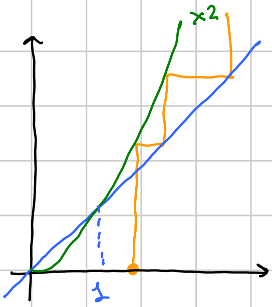
$P_1 = (x_1, f(x_1)) = (x_1, x_2)$; $\quad Q_2 = (x_2, x_2)$

è uguale alla x di Q_1 $\quad$ è sulla bisettrice $\quad$ uguale a P_1

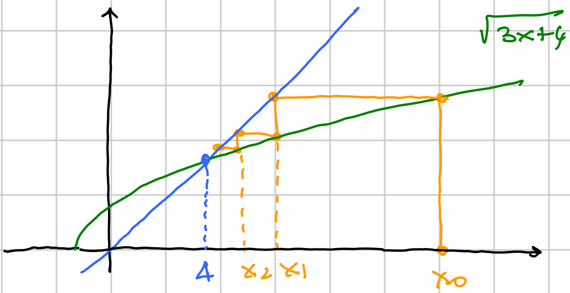
e così via...

— o — o —

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n^2 \\ x_0 = 3 \end{cases}$$



$$x_{n+1} = \sqrt{3x_n + 4}$$



Oss. ① Per stabilire dove si incontrano i due grafici risolvo

$$f(x) = x$$

che è l'equazione del p.to (iv)

$$x_{n+1} = f(x_n)$$

$$\downarrow \qquad \downarrow$$

$$\ell = f(\ell)$$

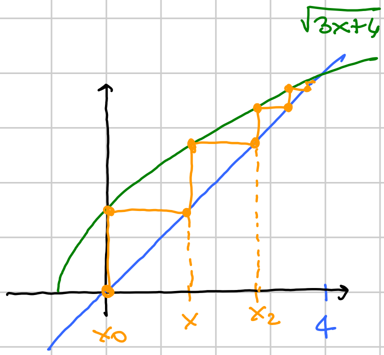
Conseguenza: $\boxed{\text{se}}$ $x_n \to \ell \in \mathbb{R}$, allora ℓ è uno dei p.ti di incontro dei 2 grafici.

② Per sapere la posizione di $f(x)$ rispetto ad x devo risolvere $f(x) \geq x$ o $f(x) > x$, che sono le disequazioni del p.to (ii) del piano

$$x_{n+1} \geq x_n \underset{\text{ricorrenza}}{\Longleftrightarrow} f(x_n) \geq x_n$$

— o — o —

Esempio $\begin{cases} x_{n+1} = \sqrt{3x_n + 4} \\ x_0 = 0 \end{cases}$



PIANO (i) $0 \leq x_n \leq 4 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(ii) $x_{n+1} \geq x_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(iii) $x_n \to \ell \in \mathbb{R}$

(iv) $\ell = 4$

La dimostrazione dei vari p.ti è standard.

Sappiamo che $x_n \to 4$. Domanda: come ci tende?
Ad esempio, cosa possiamo dire di

$$\lim_{n \to +\infty} (x_n - 4)\, n^{2015} \qquad\qquad \sum_{n=0}^{\infty} |x_n - 4|$$

Esempio $\begin{cases} x_{n+1} = x_n^2 \\ x_0 = \frac{3}{4} \end{cases}$ $x_n \to 0$

- $\lim_{n\to+\infty} \underbrace{n^{2015} x_n}_{a_n} = ?$ $a_n > 0$ (facile induzione) quindi uso il criterio del rapporto

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^{2015}\, x_{n+1}}{n^{2015}\, x_n} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{uso} \\ \text{ricorrenza}}}{=} \underbrace{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{2015}}_{\downarrow \atop 1} \underset{\downarrow \atop 0}{x_n} \to 0$$

($x_{n+1} = x_n^2$)

quindi anche $a_n \to 0$.

- $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{x_n}$ Rapporto $\to$ radice $\frac{x_{n+1}}{x_n} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{ricor.}}}{=} x_n \to 0$

quindi $\sqrt[n]{x_n} \to 0$.

— o — o —

Esempio $\begin{cases} x_{n+1} = \sqrt{3x_n + 4} \\ x_0 = 0 \end{cases}$ $\lim_{n\to+\infty} \underbrace{n^{2015} |x_n - 4|}_{a_n}$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^{2015}\, |x_{n+1} - 4|}{n^{2015}\, |x_n - 4|} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{2015} \frac{\left|\sqrt{3x_n+4} - 4\right|}{|x_n - 4|}$$

(razionalizzo) $$\underbrace{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{2015}}_{\downarrow \atop 1} \frac{\overset{3\,|\cancel{x_n-4}|}{|3x_n + 4 - 16|}}{|\cancel{x_n-4}| \cdot \left|\sqrt{3x_n+4} + 4\right|} \to \frac{3}{8}$$

Poiché $\frac{a_{n+1}}{a_n} \to \frac{3}{8}$, allora $a_n \to 0$ (criterio del rapporto)

Senza prendere in giro...

$$\frac{|x_{n+1} - 4|}{|x_n - 4|} \underset{\uparrow}{=} \frac{|f(x_n) - f(4)|}{|x_n - 4|} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Lagrange}}}{=} |f'(c_n)| \to |f'(4)| \underset{\substack{\uparrow \\ \text{calcolare la} \\ \text{derivata.}}}{=} \frac{3}{8}$$

uso
$f(x_n) = x_{n+1}$
$f(4) = 4$

Ora $c_n \to 4$ per i carabinieri

$\boxed{\text{Piani con la distanza}}$
$$\begin{cases} x_{n+1} = \sqrt{3x_n + 4} \\ x_0 = 2015 \end{cases}$$

$\boxed{\text{PIANO}}$ Pongo $d_n := |x_n - 4|$ = distanza dal presunto limite

Dimostrare che $x_n \to 4$ è equivalente a dim. che $d_n \to 0$

(i) $x_n \geq 4 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ Facile induzione come prima

(ii) $d_{n+1} \leq \frac{3}{8} d_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(iii) $d_n \leq \left(\frac{3}{8}\right)^n d_0$

(iv) $d_n \to 0$, cioè $a_n \to 4$

$\boxed{\text{Dim. (iv)}}$ Dal (iii) sappiamo che

val. assol.

$$0 \leq d_n \leq \left(\frac{3}{8}\right)^n d_0$$

$$\downarrow \qquad \downarrow \qquad \downarrow$$

$$0 \qquad 0 \qquad 0$$

(serve che $\frac{3}{8} < 1$)

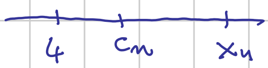
$\boxed{\text{Dim (iii)}}$ Banale induzione a partire da (ii)

$\boxed{\text{Dim (ii)}}$ Uso la definizione di d_n:

ricorr. $+ f(4) = 4$

$$d_{n+1} = |x_{n+1} - 4| = |f(x_n) - f(4)|$$

(Lagrange)
$$= |f'(c_n)| \cdot \underbrace{|x_n - 4|}_{d_n}$$



$$= |f'(c_n)| \cdot d_n$$

Spero che $|f'(c_n)| \leq \frac{3}{8}$ ... $\qquad f'(x) = \dfrac{3}{2\sqrt{3x+4}}$

Ora $\quad f'(c_n) \le f'(4) = \frac{3}{8}$

perché $c_n \ge 4$ e $f'(x)$ è decrescente

Quindi ho ottenuto che $\quad d_{n+1} \le \frac{3}{8} d_n$.

Oss. Nei piani con la distanza il pto chiave è il (ii) dove serve

$$d_{n+1} \le c\, d_n$$

deve essere minore di 1 e la stessa per ogni n

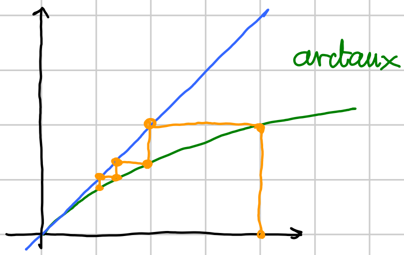
In pratica c è il sup di $|f'(x)|$ nella zona in cui la successione sta.

Alla fine è una questione di Lipschitzianità ... perché si arriva a

$$d_{n+1} = |x_{n+1} - \ell| = |f(x_n) - f(\ell)| \le L\,|x_n - \ell| = L\, d_n$$

presunto limite $\qquad$ lipsch.

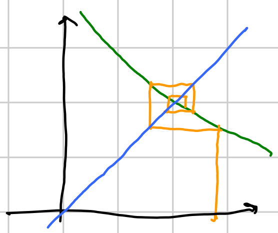
Occhio: se $L \ge 1$ sono guai



Esempio $\begin{cases} x_{n+1} = \arctan x_n \\ x_0 = 2015 \end{cases}$

$x_n \to 0$, il piano con la monotonia funziona, quello con la distanza no $(L=1)$

— o — o —



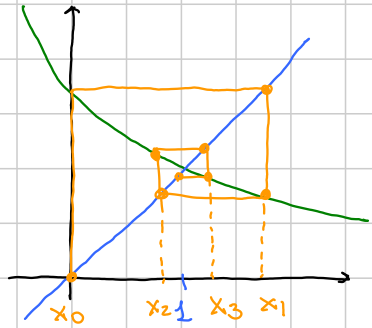
ANALISI 1 — LEZIONE 087

Titolo nota 10/03/2015

Successioni per ricorrenza spiraleggianti

Due approcci → piano con la distanza
→ piano con le due sottosuccessioni

Esempio 1
$$\begin{cases} x_{n+1} = \dfrac{8}{5+3x_n} \\ x_0 = 0 \end{cases}$$



Idea: $x_n \to 1$ spiraleggiando

$\boxed{\text{PIANO CON LA DISTANZA}}$

presunto limite

Pongo $d_n := |x_n - 1|$

(i) $x_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ (Potrei mettere $0 \leq x_n \leq \frac{8}{5} \quad \forall n \in \mathbb{N}$)

(ii) $d_{n+1} \leq c\, d_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$ (voglio che $c < 1$)

(iii) $d_n \leq c^n d_0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(iv) $d_n \to 0$, cioè $x_n \to 1$

Tutto sta a capire al p.to (ii) chi è c, che poi è la costante di Lip. di $f(x) = \dfrac{8}{5+3x}$ in $x \geq 0$, cioè

$$\max\{|f'(x)| : x \geq 0\} = \max\left\{\frac{8 \cdot 3}{(5+3x)^2} : x \geq 0\right\} = \frac{24}{25} = c$$

$\boxed{\text{Dim (ii)}}$ 1° modo: usando la Lipschitzianità

$$d_{n+1} = |x_{n+1} - 1| = |f(x_n) - f(1)| \leq \frac{24}{25}|x_n - 1| = \frac{24}{25} d_n$$

2° modo: con le mani

$$d_{n+1} = |x_{n+1} - 1| = \left| \frac{8}{5+3x_n} - 1 \right| = \left| \frac{8-5-3x_n}{5+3x_n} \right| = \frac{3|x_n - 1|}{|5+3x_n|}$$

$$= \boxed{\frac{3}{|5+3x_n|}} \cdot d_n \leq \frac{3}{5} d_n$$, quindi ho un c diverso che va comunque bene perché è < 1.

$\leq \frac{3}{5}$

— o — o —

PIANO CON LE DUE SOTTOSUCCESSIONI

Idea: x_n non è monotona, ma x_{2n} e x_{2n+1} lo sono.

(i) $0 \leq x_{2n} \leq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(i') $1 \leq x_{2n+1} \leq \frac{8}{5} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(ii) $x_{2n+2} \geq x_{2n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$ (sui pari cresce)

(ii') $x_{2n+3} \leq x_{2n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$ (sui dispari decresce)

(iii) $x_{2n} \to \ell \in \mathbb{R}$

(iii') $x_{2n+1} \to m \in \mathbb{R}$

(iv) $\ell = m = 1$, quindi globalmente $x_n \to 1$

Dim (iii) e (iii') ⇝ facili (teo. succ. monotone)

Dim. (iv)

$$x_{2n+1} = \frac{8}{5+3x_{2n}} \qquad x_{2n+2} = \frac{8}{5+3x_{2n+1}}$$

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$$

$$m = \frac{8}{5+3\ell} \qquad \ell = \frac{8}{5+3m}$$

Invece di una equ. per ℓ, ho un sistema per m ed ℓ.

$$\begin{cases} 5m + 3m\ell = 8 \\ 5\ell + 3m\ell = 8 \end{cases} \rightsquigarrow m = \ell \rightsquigarrow 3m^2 + 5m - 8$$
$$\rightsquigarrow m = 1 \quad \text{e} \quad \boxed{m = -\frac{8}{3}}$$ incomp. con (i) e (i')

I p.ti (i), (i'), (ii), (ii') si possono fare uno per volta per induzione,
Volendo c'è una scorciatoia.
Sono infatti equivalenti a dimostrare che

$$\boxed{0 \leq x_{2n} \leq x_{2n+2} \leq 1 \leq x_{2n+3} \leq x_{2n+1} \leq \frac{8}{5}}$$

"Basta" dimostrare tutto ciò per induzione.

Il passo base $n=0$ si fa a mano (ma anche qui risparmieremo).
Per il passo induttivo, prendo la catena e applico $f(x) = \frac{8}{5+3x}$

Essendo $f(x)$ decrescente, inverto i versi

$$f\left(\frac{8}{5}\right) \leq f(x_{2n+1}) \leq f(x_{2n+3}) \leq f(1) \leq f(x_{2n+2}) \leq f(x_{2n}) \leq f(0)$$

$$0 \leq x_{2n+2} \leq x_{2n+4} \leq 1 \leq x_{2n+3} \leq x_{2n+1} \leq \frac{8}{5}$$

Se ora applico nuovamente $f(x)$ e inverto nuovamente i versi ottengo la tesi del passo induttivo.

Più con le mani: $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{8}{5}$, $x_2 = \frac{8}{5+3\cdot\frac{8}{5}} = \frac{40}{49}$

Quindi $x_0 \leq x_2 \leq 1$ Applico $f(x)$, invertendo i versi

$x_1 \geq x_3 \geq 1$ " " " " "

$x_2 \leq x_4 \leq 1$

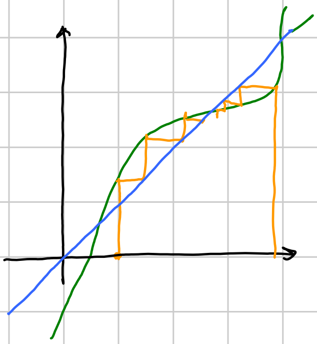
$x_3 \geq x_5 \geq 1$

Continuando in questo modo, ottengo tutte le disuguaglianze che servono.

Quindi lo spiraleggiamento è causato dall'aver utilizzato una $f(x)$ decrescente.

Achtung! Se $f(x)$ è crescente, allora x_n può essere crescente o decrescente ma è sempre monotona

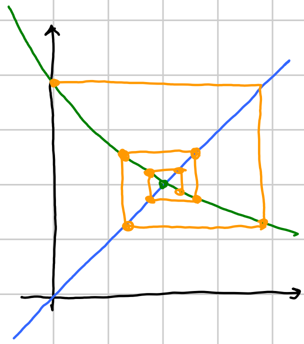
A decidere se x_n cresce o decresce è se $f(x) > x$ oppure $f(x) < x$ in una certa zona.



Se $f(x)$ è decrescente, allora per forza x_n è spiraleggiante, e lo spiraleggiamento può essere entrante o uscente.

— o — o —

Esempio 2 $\begin{cases} x_{n+1} = \dfrac{8}{3+5x_n} \\ x_0 = 0 \end{cases}$



Idea: spiraleggiamento entrante.

$\boxed{\text{PIANO CON LA DISTANZA}}$ ... $|f'(x)| = \dfrac{8 \cdot 5}{(3+5x)^2}$, quindi

$\max\{|f'(x)| : x \geq 0\} = \dfrac{40}{9}$, quindi con la lip.

non viene SUBITO.

$\boxed{\text{PIANO CON LE SUCCESSIONI}}$ Funziona sicuramente.

Basta verificare che

$$\boxed{x_0 \leq x_2 \leq 1}$$

$x_0 = 0 \qquad x_1 = \dfrac{8}{3} \qquad x_2 = \dfrac{8}{3+5x_1} = \dfrac{8}{3+\frac{40}{3}} = \dfrac{24}{49}$

Applicando $f(x)$ ed invertendo i versi trovo a cascata tutte le disuguaglianze che servono.

Volendo salvare il piano con la distanza basta cercare un termine x_{2n_0} tale che

$$\max\{|f'(x)| : x \geq x_{2n_0}\} < 1$$

a quel p.to la Lip. è con costante < 1.

Poichè $|f'(1)| = \frac{5}{8}$, pur di mettersi abbastanza vicino ad 1, la costante scende sotto 1.

ANALISI 1 – LEZIONE 088

Titolo nota 11/03/2015

Successioni per ricorrenza non autonome

$x_{n+1} = f(x_n, n)$ ← la regola di passaggio cambia ogni volta.

$\boxed{\text{L'unica regola è che non ci sono regole!}}$

Esempio 1 $\quad x_{n+1} = \dfrac{x_n}{\sqrt{n+3}} \qquad x_0 = 2015 \qquad x_1 \overset{n=0}{=} \dfrac{x_0}{\sqrt{3}} = \dfrac{2015}{\sqrt{3}}$

$\boxed{1^o \text{ modo}}$ Piano classico con monotonia

(i) $x_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ (banale induzione)

(ii) $x_{n+1} \leq x_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(iii) $x_n \to \ell \in \mathbb{R}$ ((i) + (ii) + teo. succ. monotone)

(iv) $\ell = 0$

$\boxed{\text{Dim (ii)}}$ Ricorrenza + disequazione

$$x_{n+1} \leq x_n \iff \frac{x_n}{\sqrt{n+3}} \leq x_n \iff \underbrace{x_n}_{\geq 0 \text{ per (i)}} \underbrace{\left(1 - \frac{1}{\sqrt{n+3}}\right)}_{\geq 0} \geq 0$$

, quindi ok

$\boxed{\text{Dim. (iv)}}$ Passo al limite nella ricorrenza

$$\boxed{x_{n+1}} = \boxed{\frac{x_n \nearrow \ell}{\sqrt{n+3} \to +\infty}}$$

$$\ell = 0$$

Ho usato il fatto che so già che $\ell \in \mathbb{R}$.

$$x_{n+1} = \frac{x_n}{\sqrt{n+3}}$$

$$\ell = \frac{\ell}{\sqrt{n+3}}$$

NO! LIMITE METÀ PER VOLTA

$\boxed{2^\circ \text{ modo}}$ $\quad x_{n+1} = \dfrac{x_n}{\sqrt{n+3}} \qquad x_0 = 2015$

$\boxed{\text{PIANO}}$ (i) $x_n > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ (banale induzione)

(ii) $x_n \to 0$

$\boxed{\text{Dim (ii)}}$ Applico il rapporto (posso per (i))

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{1}{\sqrt{n+3}} \to 0 \quad , \text{ quindi } x_n \to 0$$

$\boxed{3^\circ \text{ modo}}$ $\boxed{\text{Piano Limitatezza + carabinieri}}$

(i) $0 \leq x_n \leq 10.000 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ (Facile induzione)

(ii) $x_n \to 0$

$\boxed{\text{Dim (i)}}$ $x_n \geq 0$ è banale

$x_n \leq 10.000$ Passo base: $2015 \leq 10.000$

Passo induttivo Ipotesi: $x_n \leq 10.000$ Tesi: $x_{n+1} \leq 10.000$

Dim: $\quad x_{n+1} = \dfrac{x_n}{\sqrt{n+3}} \leq \dfrac{10.000}{\sqrt{n+3}} \leq \dfrac{10.000}{\sqrt{3}} \leq 10.000$

$\boxed{\text{Dim. (ii)}}$ Dalla (i) ottengo che (dividendo per $\sqrt{n+3}$)

$$0 \leq \frac{x_n}{\sqrt{n+3}} \leq \frac{10.000}{\sqrt{n+3}} \quad , \text{ cioè } \underset{\downarrow \atop 0}{0} \leq \underset{\downarrow \atop 0}{x_{n+1}} \leq \underset{\downarrow \atop 0}{\boxed{\frac{10.000}{\sqrt{n+3}}}}$$

Oss. finale: se $x_{n+1} \to \ell \in \overline{\mathbb{R}}$, allora anche $x_n \to \ell$ (stesso).

Achtung! $\quad x_n \to 8 \quad \Rightarrow \quad x_{2n} \to 8$

non viceversa

$x_{n+5} \to 8 \quad \Leftrightarrow \quad x_n \to 8$

sottosucc. FINTA

$\boxed{\text{Esempio 2}}$ $\quad x_{n+1} = \dfrac{\arctan(\sinh x_n)}{n} \qquad x_1 = 2015$

PIANO : $\quad \boxed{0} \le x_{n+1} \le \boxed{\dfrac{37}{n}}$ $\quad$ Se $x_{n+1} \to 0$, anche $x_n \to 0$

$$\begin{array}{ccc} 0 & & x_{n+1} & & \frac{37}{n} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & & 0 & & 0 \end{array}$$

Esempio 3 $\quad x_{n+1} = \dfrac{2x_n + 5}{n} \qquad x_1 = 2015$

Il piano con la monotonia rischia di essere complicato

$$x_{n+1} \le x_n \iff \frac{2x_n+5}{n} \le x_n \iff 2x_n + 5 \le n x_n$$

$$\iff \underbrace{x_n \ge \frac{5}{n-2}}$$

↑ mi servirebbe in un p.to (i)

$\boxed{\text{PIANO}}$ (i) $0 \le x_n \le 10.000 \quad \forall n \ge 1$

(ii) $x_n \to 0$

$\boxed{\text{Dim (ii)}}$ Da (i) segue che $\quad \dfrac{5}{n} \le x_{n+1} \le \dfrac{20.005}{n}$

e da qui si chiude

$\boxed{\text{Dim (i)}}$ $\quad x_n \ge 0$ davvero banale

$x_n \le 10.000 \quad$ P.B. ... $\quad$ P.I. Ipotesi $x_n \le 10.000$

$$x_{n+1} = \frac{2x_n+5}{n} \le \frac{20.005}{n} \le 10.000$$

↑ ok solo per $n \ge 3$

Devo fare a MANO i passi base $n = 1, 2, 3$ (in realtà basta 3)

— o — o —

Esempio 4 $\quad x_{n+1} = \sqrt[n]{1 + x_n} \qquad x_1 = 2015$

$\boxed{\text{PIANO}}$ (i) $1 \leq x_n \leq 10.000$

(ii) $x_n \to 1$

$\boxed{\text{Dim (ii)}}$ $\quad 1 \leq x_{n+1} \leq \sqrt[n]{10.001}$

$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$

$1 \quad 1 \quad 1$

$\boxed{\text{Dim (i)}}$ Induzione ... $\quad x_{n+1} = \sqrt[n]{1 + x_n} \leq \sqrt[n]{10.001} \leq 10.000$

ok per $n \geq 2$

Quindi bisogna fare $n = 1$ e $n = 2$ a mano.

Esempio 5 $\quad x_{n+1} = \sqrt[n]{n + x_n} \qquad x_1 = 2015$

Posso provare come prima $\quad$ (i) $1 \leq x_n \leq 10.000$

... $\quad x_{n+1} \leq \sqrt[n]{n + 10.000} \overset{?}{\leq} 10.000$

$\Leftrightarrow \quad (n + 10.000) \leq 10.000^n$

Alternativa: essere meno tirchi in fase (i)

(i') $1 \leq x_n \leq 10.000\,(n+1)$

... $\quad x_{n+1} \leq \underbrace{\sqrt[n]{n + 10.000\, n + 10.000} \leq 10.000\,(n+2)}$

$(10.001\, n + 10) \leq (10.000\, n + 20.000)^n$

davvero abbondante

Esempio 6 $\quad x_{n+1} = 7 + \dfrac{n^{10}}{2^n}\, x_n \qquad x_1 = 2015$

Questa va in overflow dopo 2 o 3 passaggi ... e infatti tende a 7.

$\boxed{\text{Piano}}$ $\exists\, n_0 > 0$ t.c. $\dfrac{n^{10}}{2^n} \le \dfrac{1}{2} \quad \forall n \ge n_0$

(definizione di limite)

(i) $0 \le x_n \le x_{n_0} + 14 \quad \forall n \ge n_0$

(ii) $x_n \to 7$

$\boxed{\text{Dim (ii)}}$ $\boxed{7} \le x_{n+1} \le \boxed{7 + \dfrac{n^{10}}{2^n} \cdot (x_{n_0} + 14)}$

$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$

$7 \qquad\qquad 7$

$\boxed{\text{Dim (i)}}$ Parte vera: $x_n \le x_{n_0} + 14$

P.B. Banale

P.I. Ipotesi: $x_n \le x_{n_0} + 14$ Tesi: $x_{n+1} \le x_{n_0} + 14$

Dim $x_{n+1} = 7 + \dfrac{n^{10}}{2^n} x_n \le 7 + \dfrac{n^{10}}{2^n}(x_{n_0} + 14)$

$\le \cancel{7} + \dfrac{1}{2}(x_{n_0} + \cancel{14}) \overset{?}{\le} x_{n_0} + \cancel{14}$

vero $\iff \dfrac{1}{2} x_{n_0} \le x_{n_0}$

vero perché $x_{n_0} \ge 0$.

— o — o —

ANALISI 1 — LEZIONE 089

Titolo nota 11/03/2015

Esempio 1 $\begin{cases} x_{n+1} = \dfrac{x_n^2}{n} \\ x_1 = 1 \end{cases}$

$x_n \to 0$ e si può dimostrare in vari modi
- piano con la monotonia
- piano limitatezza + carabinieri (i) $0 \leq x_n \leq 1 \quad \forall n \geq 1$
  (ii) $x_n \to 0$

$\boxed{\text{Dim (i)}}$ ... $x_{n+1} = \dfrac{x_n^2}{n} \leq \dfrac{1}{n} \leq 1$ ...

Esempio 2 $\begin{cases} x_{n+1} = \dfrac{x_n^2}{n} \\ x_1 = 2015 \end{cases}$

Idea: crescita del numeratore compete con la crescita del denominatore

$\boxed{\text{PIANO}}$ (i) $x_n \geq 2^n \quad \forall n \geq 1$
(ii) $x_n \to +\infty$ (banale da (i))

$\boxed{\text{Dim (i)}}$ Provo per induzione. PB $\rightsquigarrow$ facile

$\boxed{\text{P.I.}}$ $x_{n+1} = \dfrac{x_n^2}{n} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{ipotesi induttiva}}}{\geq} \dfrac{4^n}{n} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{spero ...}}}{\geq} 2^{n+1}$

Controllo la speranza: $\dfrac{4^n}{n} \geq 2^{n+1} \iff 2^{n-1} \geq n$

$(1+1)^{n-1} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Bernoulli}}}{\geq} 1 + (n-1) \cdot 1 = n$

Speranza OK $\Rightarrow$ pto (i) OK.

Idea: c'è un valore α_0 t.c.

- per $x_1 > \alpha_0$ si ha $x_n \to +\infty$
- per $0 \le x_1 < \alpha_0$ si ha $x_n \to 0$

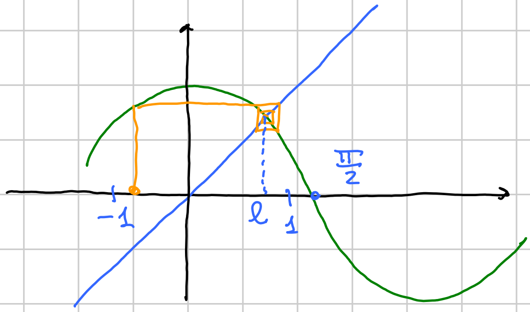
\# capra e panca

Cosa succede per $\alpha = \alpha_0$?

— o — o —

Esempio 3 Scrivo 2015 sulla calcolatrice, e poi schiaccio in continuazione cos ?
Dopo un po' si stabilizza su 0.73...

$$\begin{cases} x_{n+1} = \cos x_n \\ x_0 = 2015 \end{cases}$$



Idea: $x_n \to \ell$, dove ℓ è la soluzione di $x = \cos x$

$\boxed{\text{Fatto 1}}$ L'equazione $x = \cos x$ ha un'unica sol. ℓ reale

Dim. Considero $f(x) = x - \cos x$. Per monotonia 3 è strett. crescente, quindi iniettiva. I limiti a $\pm\infty$ mi danno la surgettività. Quindi $f(x) = 0$ ha sol. unica

$\boxed{\text{FATTO 2}}$ Dimostro che $x_n \to \ell$ con la distanza.
$d_n := |x_n - \ell|$ e provo $d_{n+1} \le c\, d_n$

$$\ldots\ d_{n+1} = |x_{n+1} - \ell| = |\cos x_n - \cos \ell| = \underbrace{|\sin c_n|}_{\le 1} \cdot \underbrace{|x_n - \ell|}_{d_n}$$

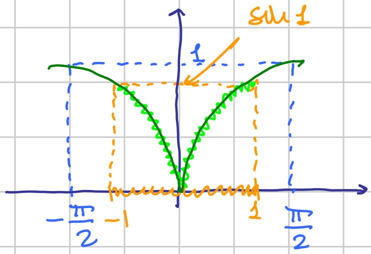
avrei ottenuto $d_{n+1} \le d_n$ e questo NON basta

$\boxed{\text{PIANO}}$ (i) $-1 \le x_n \le 1 \quad \forall n \ge 1$ (banale)
(ii) $d_{n+1} \le (\sin 1) \cdot d_n \quad \forall n \ge 1$
(iii) $d_n \le (\sin 1)^{n-1} d_1 \quad \forall n \ge 1$ (banale)
(iv) $d_n \to 0$ (banale)

$\boxed{\text{Dim (ii)}}$ $\quad d_{n+1} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{come} \\ \text{sopra}}}{=} |\sin c_n| \cdot d_n$

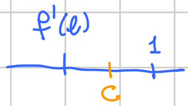
Ora c_n sta tra ℓ e x_n, quindi $c_n \in [-1,1]$ e

$$\max\{|\sin x| : x \in [-1,1]\} = \sin 1 < 1$$



— o — o —

Prendiamo $x_{n+1} = f(x_n)$ autonoma
Sia ℓ un soluzione di $x = f(x)$.
Supponiamo che $|f'(\ell)| < 1$.
Se $f'(x)$ è continua, allora



$\frac{|f'(\ell)|+1}{2}$

$$\boxed{\exists\, r_0 > 0 \;\exists\, c < 1 \text{ tale che } |f'(x)| \leq c \quad \forall x \in [\ell - r_0, \ell + r_0]}$$

Conseguenza: $\begin{cases} x_{n+1} = f(x_n) \\ x_0 \in [\ell - r_0, \ell + r_0] \end{cases}$ Allora $x_n \to \ell$

Dim. piano con la distanza $d_n = |x_n - \ell|$

$$d_{n+1} = |x_{n+1} - \ell| = |f(x_n) - f(\ell)|$$

$$= \underbrace{|f'(c_n)|}_{\leq c} \cdot \underbrace{|x_n - \ell|}_{d_n}$$

$\leq c \cdot d_n$ e da qui si conclude come sempre poiché $c < 1$.

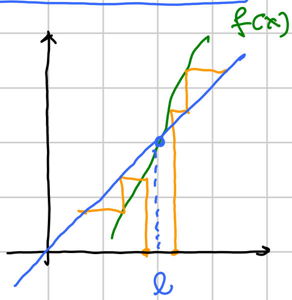
Brutalmente: se in un p.to ℓ di incontro ($\ell = f(\ell)$) si ha che $|f'(\ell)| < 1$, allora ogni successione che parte vicino ad ℓ tende ad ℓ.

— o — o —

Supponiamo ora che $|f'(\ell)| > 1$. Allora se è continua

$$\boxed{\exists\, c > 1 \ \exists\, r_0 > 0 \text{ tale che } |f'(x)| \geq c \quad \forall x \in [\ell - r_0, \ell + r_0]}$$

Allora se considero $x_{n+1} = f(x_n)$ le soluzioni non possono tendere ad ℓ, a meno che non assumano definitivamente il valore ℓ



Dim. Se per assurdo $x_n \to \ell$, allora definitivamente

$$x_n \in [\ell - r_0, \ell + r_0]$$

ma in quell'intorno avrei

$$d_{n+1} = |f'(c_n)| \cdot d_n \geq \underset{\substack{\uparrow \\ \text{maggiore di } 1}}{c}\, d_n$$

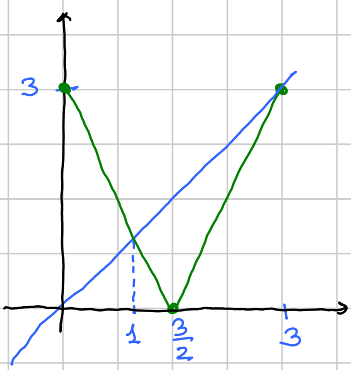
e quindi la distanza dal limite definitivamente aumenta

— o — o —

Esempio $\begin{cases} x_{n+1} = |2x_n - 3| \\ x_0 = \sqrt{2} \end{cases}$

$x = 3 - 2x \rightsquigarrow x = 1$

Dico che x_n non ha limite



$\boxed{\text{FATTO 1}}$ $0 \leq x_n \leq 3 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ (facile induzione usando $f([0,3]) = [0,3]$)

Questo esclude $x_n \to +\infty$ o $x_n \to -\infty$

$\boxed{\text{FATTO 2}}$ Se $x_n \to \ell$, allora $\ell = 1$ oppure $\ell = 3$ (incontro dei grafici).
Tuttavia, quando $x_n \in [\frac{3}{2}, 3]$ la sua distanza da 3 raddoppia, quando $x_n \in [0, \frac{3}{2}]$ la sua distanza da 1 raddoppia

$\boxed{\text{FATTO 3}}$ Se dimostro che x_n non diventa mai 1 o 3, allora ho dimostrato che non ha limite.
Per fare questo basta dire che
$$x_n = a_n\sqrt{2} + b_n \qquad \text{con } a_n \text{ e } b_n \text{ interi e } a_n \neq 0$$

(banale induzione)

ANALISI 1 – LEZIONE 090

Titolo nota 13/03/2015

<u>Esempio</u> $\begin{cases} x_{n+1} = x_n\left(x_n + \frac{1}{n}\right) \\ x_1 = \alpha > 0 \end{cases}$ $\qquad x_{n+1} = x_n^2 + x_n \frac{1}{n}$

Studiare il comportamento al variare di α.

<u>Oss.</u> Supponiamo che $x_n \to \ell$. Chi può essere ℓ?

$$x_{n+1} = x_n^2 + x_n \cdot \frac{1}{n}$$

$$\ell = \ell^2 \quad 0 \text{ (se } \ell \text{ è reale)} \qquad \ell = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}$$

Anche $\ell = +\infty$ sembra essere un limite possibile.

Ci aspettiamo un <u>effetto soglia</u>: esiste $\alpha_0 > 0$ t.c.

- se $\alpha > \alpha_0$ la succ. $x_n \to +\infty$
- se $\alpha = \alpha_0$ la succ. $x_n \to 1$
- se $\alpha < \alpha_0$ la succ. $x_n \to 0$

<u>Notazione</u>: indico con $x_n(\alpha)$ il valore di x_n ottenuto quando si parte con $x_1 = \alpha$

$x_1(\alpha) = \alpha$, $\quad x_2(\alpha) = \alpha(\alpha+1)$, $\quad x_3(\alpha) = x_2(\alpha)\left(x_2(\alpha) + \frac{1}{2}\right)$

$$= \alpha(\alpha+1)\left[\alpha(\alpha+1) + \frac{1}{2}\right]$$

e così via.

FATTO 1 Per ogni $n \geq 1$, la funzione $x_n(\alpha)$ è una funzione continua e strettamente crescente di α

<u>Dim.</u> $x_1(\alpha) = \alpha$ è continua e strett. cresc.

$x_{n+1}(\alpha) = x_n(\alpha)\left(x_n(\alpha) + \frac{1}{n}\right)$ è continua perché prodotto di funzioni continue ed è strett. crescente perché

$\alpha_1 > \alpha_2 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{ipotesi} \\ \text{induttiva}}}{\Longrightarrow} x_n(\alpha_1) > x_n(\alpha_2) \Rightarrow x_n(\alpha_1)\left(x_n(\alpha_1) + \frac{1}{n}\right) >$ stessa cosa con α_2.

$\boxed{\text{FATTO 2}}$ Esistono dei valori $\alpha > 0$ tali che $x_n(\alpha) \to +\infty$ per $n \to +\infty$

$\boxed{\text{Dim.}}$ Basta partire con $\alpha > 1$. Allora per induzione si dim. che x_n è crescente

$$\ldots \quad x_{n+1} = x_n^2 + x_n \frac{1}{n} \geq x_n^2 \geq x_n \quad (\text{se } x_n \geq 1)$$

Essendo crescente ha limite in $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Se fosse $l \in \mathbb{R}$ dovrebbe essere $l = 0$ oppure 1 e non è possibile perché $x_0 > 1$ e poi è crescente.

$\boxed{\text{FATTO 2 BIS}}$ Se $\exists\, n_0 \geq 1$ tale che $x_{n_0} > 1$, allora da lì in poi è crescente e tende a $+\infty$.

(Stessa dim. di sopra)

$\boxed{\text{FATTO 3}}$ L'insieme degli α per cui $x_n \to +\infty$ è una semiretta aperta (senza l'estremo)

$\boxed{\text{Dim.}}$ Segue dal 2 bis. Che è una semiretta è quasi ovvio per via della monotonia di $x_n(\alpha)$.
Preso $\alpha_2 > \alpha_1$, abbiamo $x_n(\alpha_2) \geq x_n(\alpha_1)$ per ogni $n \geq 1$.
Quindi se $x_n(\alpha_1) \to +\infty$, a maggior ragione ci tende $x_n(\alpha_2)$.
Devo dimostrare che è aperta. Cosa vuol dire? Vuol dire che se per un certo $\alpha_0 > 0$ si ha che $x_n \to +\infty$, allora lo stesso vale anche per qualche valore $\alpha_1 < \alpha_0$.

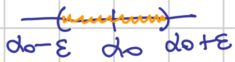
Visto che $x_n(\alpha_0) \to +\infty$, esiste $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che

$$x_{n_0}(\alpha_0) > 1$$

Ma poiché la funzione $x_{n_0}(\alpha)$ è continua, avremo che

$$x_{n_0}(\alpha) > 1$$

anche in tutto un intorno di α_0



$\boxed{\text{FATTO 4}}$ Se per un certo $n \geq 1$ si ha che

$$x_{n+1} < x_n$$

allora da lì in poi x_n è decrescente

$\boxed{\text{Dim.}}$ Supponiamo che $x_{n_0+1} < x_{n_0}$. Allora $x_{n+1} < x_n$ per ogni $n \geqslant n_0$

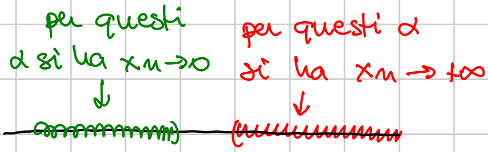
Si dim. per induzione. PB $n = n_0$ è banale

$\boxed{\text{P.I.}}$ Se per ipotesi $x_{n+1} < x_n$, allora

$$x_{n+2} = \underbrace{x_{n+1}}_{\leq x_n}\Big(\underbrace{x_{n+1}}_{\leq x_n} + \underbrace{\frac{1}{n+1}}_{\leq \frac{1}{n}}\Big) \leq x_n\left(x_n + \frac{1}{n}\right) = x_{n+1}$$

cioè la tesi induttiva.

$\boxed{\text{FATTO 5}}$ Esistono degli α per cui $x_n \to 0$ e tali α sono un intervallo aperto.



$\boxed{\text{Dim.}}$ Esistono degli per cui

$$x_3(\alpha) < x_2(\alpha) \quad , \text{ cioè}$$

$$\cancel{\alpha}(\cancel{\alpha+1})\left[\alpha(\alpha+1) + \frac{1}{2}\right] < \cancel{\alpha}(\cancel{\alpha+1})$$

cioè $\quad \alpha(\alpha+1) + \frac{1}{2} < 1 \quad$ e basta prendere α piccolo perché sia vero.

A quel p.to x_n è decrescente, quindi ha limite, dunque il

Limite è 0 (può essere solo 0 o 1, ma da x_2 in poi è decrescente e $x_2 < 1$ se α è piccolo).

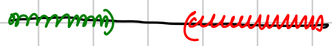
$\boxed{\text{FATTO 6}}$ Dimostro che se per α_0 si ha che $x_n \to 0$, allora lo stesso vale per gli α vicini.

Dim. Visto che $x_n(\alpha_0) \to 0$, allora esiste n_0 t.c.

$$x_{n_0+1}(\alpha_0) < x_{n_0}(\alpha_0) < 1$$

Ma allora la stessa relazione vale per gli α vicini ad α_0, e quindi per gli stessi α vicini è costretta a tendere a 0.

$\boxed{\text{FATTO 7}}$ Cosa succede per gli α "in mezzo", ad esempio sup verde oppure inf rosso?



Non può tendere a 0 e non può tendere a $+\infty$.
Non può esistere n_0 t.c. $x_{n_0+1} < x_{n_0}$, perchè allora da lì in poi sarebbe decrescente e quindi tenderebbe a 0.
Quindi $x_{n+1} \geq x_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, quindi esiste il limite e l'unico limite disponibile è 1.

$\boxed{\text{FATTO 8}}$ Sup verde = inf rosso, cioè esiste un unico valore α_0 t.c. $x_n \to 1$.

$\boxed{\text{Dim.}}$ Supponiamo ce ne siano 2: α_1 e α_2.
Wlog supponiamo $\alpha_1 < \alpha_2$.
Sia y_n la successione che parte da α_1
Sia z_n la successione che parte da α_2
Considero $d_n = z_n - y_n$.

Allora

$$d_{n+1} = z_{n+1} - y_{n+1} = z_n^2 + \frac{1}{n} z_n - y_n^2 - \frac{1}{n} y_n$$

$$= (z_n + y_n)(z_n - y_n) + \frac{1}{n}(z_n - y_n)$$

$$= \left(z_n + y_n + \frac{1}{n}\right)(z_n - y_n)$$

$$= \underbrace{\left(z_n + y_n + \frac{1}{n}\right)}_{\downarrow\, 2} d_n$$

$d_n > 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ (banale induzione). Inoltre

$$d_{n+1} \geq \frac{3}{2} d_n$$

da un certo p.to in poi

e questo impedisce a d_n di tendere a 0, cosa che dovrebbe fare in quanto

$$d_n = z_n - y_n \to 1 - 1 = 0.$$

— o — o —

$\boxed{\text{PIANO GENERALE}}$

① Se supera 1 tende a $+\infty$. I dati iniziali per cui prima o poi supera 1 sono una semiretta aperta

② Se ad un certo p.to $x_{n+1} < x_n$ (≤ 1), allora da lì in poi è decrescente e tende a 0. I dati per cui succede sono un intervallo aperto

③ Resta almeno un dato in mezzo: per quel valore non supera 1 ed è debolmente crescente, dunque ha limite e l'unico limite a disposizione è 1.

④ In mezzo c'è un solo dato: supponendo che ce ne siano 2 si trova un assurdo.

— o — o —

ANALISI 1 — LEZIONE 091

Titolo nota 13/03/2015

Esempio $\begin{cases} x_{n+1} = \arctan n \cdot x_n^2 \\ x_1 = \alpha \geq 0 \end{cases}$

Possibili limiti: $\rightsquigarrow$ $\ell = \frac{\pi}{2} \ell^2$ $\rightsquigarrow$ $\ell = 0$ oppure $\ell = \frac{2}{\pi}$

inoltre anche $\ell = +\infty$ è compatibile.

Anche qui aspettiamo un effetto soglia.

$\boxed{\text{FATTO 1}}$ Se $x_{n_0+1} > x_{n_0}$, allora $x_{n+1} > x_n$ per ogni $n \geq n_0$

Induzione ... $x_{n+2} = \arctan(n+1) \cdot x_{n+1}^2$
$\geq \arctan n \cdot x_n^2 = x_{n+1}$

$\boxed{\text{FATTO 2}}$ Se $x_{n_0} \leq \frac{2}{\pi}$, allora $x_n \leq \frac{2}{\pi}$ per ogni $n \geq n_0$

Induzione ... $x_{n+1} = x_n^2 \cdot \arctan n \leq \left(\frac{2}{\pi}\right)^2 \frac{\pi}{2} = \frac{2}{\pi}$

$\boxed{\text{FATTO 3}}$ Se $x_{n_0} < \frac{2}{\pi}$, allora $x_{n+1} < x_n < \frac{2}{\pi}$ per ogni $n \geq n_0$

Dim. $x_{n+1} = x_n \cdot x_n \cdot \arctan n$
$< x_n \frac{2}{\pi} \frac{\pi}{2} = x_n$

$\boxed{\text{FATTO 4}}$ Zona verde: dati iniziali per cui va sotto $\frac{2}{\pi}$.
Questa è un intervallo aperto (tende a 0)
Zona rossa: dati per cui ad un certo p.to va sopra $\frac{2}{\pi}$ e cresce almeno per un valore di n (tende a $+\infty$)
In mezzo per forza tende a $\frac{2}{\pi}$

$\boxed{\text{FATTO 5}}$ Unicità: si fa come prima.

Esempio 2 $\begin{cases} x_{n+1} = \dfrac{x_n^2}{n} \\ x_1 = \alpha > 0 \end{cases}$

Visto volta precedente:

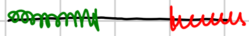
→ esistono α per cui tende a $+\infty$ (ad esempio 2015)

→ esistono α per cui tende a 0 (ad esempio 1)

Quasi evidente:

→ se per un certo α tende a $+\infty$, allora lo fa per tutti i successivi

→ se per un certo α tende a 0, allora lo fa per tutti i precedenti



La zona verde è aperta: supponiamo che per un certo $\alpha > 0$ la succ. tenda a 0, allora $\exists\, n_0 \geq 1$ tale che $x_{n_0}(\alpha) < 1$. Ma allora per continuità anche per valori vicini (più grandi o più piccoli) avremo che $x_{n_0}(\alpha) < 1$, quindi per quegli α vicini continua a tendere a 0.

Dico che sup verde = inf rosso e per quel valore tende ancora a $+\infty$.

Dim. Cosa può succedere per quel valore?

→ Non può tendere a 0 (sarebbe nel verde che è aperto)

→ Può esistere n_0 t.c. $x_{n_0+1} < x_{n_0}$? Se lo facesse, sarebbe decrescente da lì in poi...

$$x_{n+2} = \frac{x_{n+1}^2}{n+1} \leq \frac{x_n^2}{n} = x_{n+1}$$

ma allora avrebbe un limite reale e questo sarebbe per forza 0.

→ Allora $x_{n+1} \geq x_n$ per ogni n, quindi ha limite e questo non può essere reale, quindi è $+\infty$.

Detta α_0 la soglia, voglio dimostrare che l' x_n corrispondente tende a $+\infty$ come n, cioè

$$\lim_{n\to+\infty} \underbrace{\boxed{\frac{x_n}{n}}}_{y_n} = 1.$$

$\boxed{\text{Dim.}}$ Cosa risolve y_n?

$$y_{n+1} = \frac{x_{n+1}}{n+1} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{ricorr} \\ \text{per } x_{n+1}}}{=} \frac{x_n^2}{n}\,\frac{1}{n+1} \underset{\substack{\uparrow \\ x_n = n y_n}}{=} \frac{n^2 y_n^2}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}\,y_n^2$$

cioè

$$y_{n+1} = \frac{n}{n+1}\,y_n^2$$

e questo rientra negli esercizi precedenti: sopra la soglia tende a $+\infty$ (violento), sotto la soglia tende a 0 (violento), sulla soglia unica tende a 1.

— o — o —

Esempio 3
$$\begin{cases} x_{n+1} = 10\sqrt{x_n} + \frac{1}{n} \\ x_1 = \alpha \end{cases}$$

Esistono valori $\alpha > 0$ per cui x_n è crescente?

Se $x_n \to \ell \in \mathbb{R}$, allora $\ell = 10\sqrt{\ell}$, cioè $\ell = 0$ oppure $\ell = 10^2$.

$\boxed{\text{FATTO 1}}$ Se esiste $n_0 \geq 1$ tale che $x_{n_0+1} \leq x_{n_0}$, allora $x_{n+1} \leq x_n$ per ogni $n \geq n_0$

$\boxed{\text{Dim.}}$ Induzione ...

$$x_{n+2} = 10\sqrt{x_{n+1}} + \frac{1}{n+1} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{ipotesi induttiva} \\ + \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{n}}}{\leq} 10\sqrt{x_n} + \frac{1}{n} = x_{n+1}$$

$\boxed{\text{FATTO 2}}$ $x_n \leq \alpha + 200$ per ogni $n \geq 1$

$\boxed{\text{Dim.}}$ Induzione ..., $n = 1$ banale ...

$$x_{n+1} = 10\sqrt{x_n} + \frac{1}{n} \leq 10\sqrt{\alpha+200} + 1 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{controllare...}}}{\leq} \alpha + 200$$

$\boxed{\text{FATTO 3}}$ Per ogni $\alpha \geq 0$ il limite esiste ed è reale, quindi è 100.

$\boxed{\text{Dim.}}$ Abbiamo visto che

→ o è sempre crescente (quindi il limite esiste $\in \mathbb{R}$)

→ o è definitivamente decrescente (quindi come sopra)

$\boxed{\text{FATTO 2.5}}$ Se $x_n \leq 100$, allora $x_{n+1} \geq x_n$

$\boxed{\text{Dim.}}$ $$x_{n+1} = 10\sqrt{x_n} + \frac{1}{n} \geq 10\sqrt{x_n} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{se } x_n \leq 100}}{\geq} x_n$$

Alla fine sono rimasti 2 possibili comportamenti

→ cresce sempre e tende a 100

→ ad un certo p.to inizia a decrescere e tende a 100

$\boxed{\text{FATTO FINALE}}$ Il primo comportamento non è possibile perché se $x_n \leq 100$, allora

$$x_{n+1} = \underbrace{10\sqrt{x_n}} + \frac{1}{n} \geq \underbrace{x_n} + \frac{1}{n}$$

Ma allora $x_n \geq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots$ e le somme parziali dell'armonica divergono.