A.A. 2014/2015
Corso di Analisi Matematica 1

Stampato integrale delle lezioni

(Volume 3)

Massimo Gobbino

Indice

ANALISI 1 - LEZIONE 092

Titolo nota 17/03/2015

LIMINF e LIMSUP di successioni

Idea brutale: $a_n = (-1)^n$ non ha limite

$\rightsquigarrow \limsup_{n\to+\infty} a_n = 1$, $\liminf_{n\to+\infty} a_n = -1$

$b_n = (-n)^n \rightsquigarrow \limsup_{n\to+\infty} b_n = +\infty$ $\liminf_{n\to+\infty} b_n = -\infty$

Def. Sia a_n una successione di numeri reali

[1] Se a_n non è limitata superiormente, allora si pone

$$\boxed{\limsup_{n\to+\infty} a_n = +\infty}$$

[2] Se a_n è limitata superiormente (cioè $\exists M \in \mathbb{R}$ t.c. $a_n \leq M$ per ogni $n \in \mathbb{N}$), allora per ogni $k \in \mathbb{N}$

$$S_k = \sup\{a_n : n \geq k\} \in \mathbb{R}$$

è un numero reale. Inoltre $S_{k+1} \leq S_k$ perché sto facendo il sup su meno roba. Si pone allora

limsup = limite dei sup.

$$\limsup_{n\to+\infty} a_n = \underbrace{\lim_{k\to+\infty} S_k}$$

Questo limite esiste in $\mathbb{R}\cup\{-\infty\}$ perché S_k è una succ. debolmente decrescente

Oss. Poiché S_k è deb. decresc., il limite è l'inf., quindi

$$\boxed{\limsup_{n\to+\infty} a_n = \inf_{k\geq 0} \sup_{n\geq k} a_n}$$

Def. (di liminf) Sia a_n una successione.

[1] Se a_n non è limitata inferiormente, allora

$$\boxed{\liminf_{n \to +\infty} a_n = -\infty}$$

[2] Se a_n è limitata inferiormente, allora per ogni $k \in \mathbb{N}$

$$I_k := \inf\{a_n : n \geq k\} \in \mathbb{R}$$

e inoltre $I_{k+1} \geq I_k$ per ogni $k \in \mathbb{N}$, quindi posso porre

$$\boxed{\liminf_{n \to +\infty} a_n = \lim_{k \to +\infty} I_k = \sup_{k \geq 0} \inf_{n \geq k} a_n}$$

Oss. 1 liminf e limsup esistono sempre in $\overline{\mathbb{R}}$.

Proposizione Per ogni successione a_n si ha che

$$\boxed{\liminf_{n \to +\infty} a_n \leq \limsup_{n \to +\infty} a_n}$$ ← disuguaglianza in $\overline{\mathbb{R}}$

Dim. Per ogni $k \in \mathbb{N}$ si ha

$$I_k \leq S_k$$ (inf e sup dello stesso insieme)

$$\downarrow \qquad \downarrow$$

$$\liminf \leq \limsup$$ (ho usato il criterio del confronto a 2 sapendo già che I_k ed S_k hanno limite per $k \to +\infty$).

Esempio 1 $a_n = (-1)^n$. Allora

$I_k = -1 \qquad S_k = 1$ per ogni $k \in \mathbb{N}$

$\downarrow \qquad \downarrow$

$\liminf = -1 \qquad \limsup = 1$

Esempio 2 $a_n = \frac{1}{n}$. Allora $S_k = \frac{1}{k} \to 0 = \limsup$

$I_k = 0 \to 0 = \liminf$.

— o — o —

Proposizione Siano a_n e b_n due successioni con

$a_n \leq b_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$ (basta definitivamente)

Allora

$\boxed{\liminf a_n \leq \liminf b_n}$ e $\boxed{\limsup a_n \leq \limsup b_n}$

$\boxed{\text{Dim.}}$ Indichiamo con S_k^a e I_k^a sup e inf fatti su a_n
S_k^b e I_k^b " " " " b_n

$S_k^a = \sup\{a_n : n \geq k\}$ $\qquad$ $S_k^b = \sup\{b_n : n \geq k\}$

$I_k^a = \inf$ " $\qquad$ $I_k^b = \inf$ "

Allora $S_k^a \leq S_k^b$ per ogni $k \in \mathbb{N}$

$\downarrow \qquad \downarrow$

$\limsup a_n \leq \limsup b_n$

Analogamente $I_k^a \leq I_k^b$ per ogni $k \in \mathbb{N}$

$\downarrow \qquad \downarrow$

$\liminf a_n \leq \liminf b_n$

— o — o —

Caratterizzazione di LIMSUP e LIMINF

[1] $\limsup a_n = +\infty$ se e solo se

$$\boxed{\forall M \in \mathbb{R} \quad \exists n \in \mathbb{N} \quad \text{t.c.} \quad a_n \geq M}$$

Questo è come dire che $\forall M \in \mathbb{R}$ si ha $a_n \geq M$ frequentemente

[2] $\limsup a_n = L \in \mathbb{R}$ se e solo se
per ogni $\varepsilon > 0$
(i) $a_n \leq L + \varepsilon$ definitivamente
(ii) $a_n \geq L - \varepsilon$ frequentemente

$L-\varepsilon$ L $L+\varepsilon$

Dim. $L = \lim_{k \to +\infty} S_k$. Quindi $\exists k_0$ t.c. $S_k \leq L+\varepsilon$ per ogni $k \geq k_0$, quindi

$$\sup\{a_n : n \geq k\} \leq L+\varepsilon \quad \text{se } k \geq k_0$$

quindi

$$a_n \leq L+\varepsilon \quad \forall n \geq k_0$$

Resta da dimostrare che $a_n \geq L-\varepsilon$ per infiniti indici n, cioè frequentemente. Se per assurdo lo facesse un numero finito di volte, allora definitivamente avremmo

$$S_k \leq L-\varepsilon$$

e quindi passando al limite avremmo $\limsup a_n \leq L-\varepsilon$, il che è assurdo.

[3] $\limsup a_n = -\infty$ se e solo se $\lim_{n \to +\infty} a_n = -\infty$

Dim. $S_k \to -\infty$, quindi $\forall M \in \mathbb{R}$ si ha $S_k \leq M$ definitivamente, il che equivale a dire che $a_n \leq M$ definitivamente.

M

<u>Analogamente per il liminf</u>

$\boxed{1}$ $\liminf a_n = -\infty$ se e solo se

$$\forall M \in \mathbb{R} \;\; \exists n \in \mathbb{N} \text{ t.c. } a_n \leq M$$

$\boxed{2}$ $\liminf a_n = \ell \in \mathbb{R}$ se e solo se
per ogni $\varepsilon > 0$
(i) $a_n \leq \ell + \varepsilon$ frequentemente
(ii) $a_n \geq \ell - \varepsilon$ definitivamente

$\boxed{3}$ $\liminf a_n = +\infty$ se e solo se $\lim a_n = +\infty$

[Stesse dimostrazioni di prima]

<u>Teorema</u> Sia a_n una successione tale che

$$\liminf a_n = \limsup a_n = \ell \in \overline{\mathbb{R}}$$

Allora $a_n \to \ell$ (stesso ℓ)

$\boxed{\text{Dim}}$ Ci sono 3 casi

- Se $\ell = +\infty$ guardo il liminf e uso la caratterizzazione
- Se $\ell = -\infty$ guardo il limsup e " " "
- Se $\ell \in \mathbb{R}$, allora

  $a_n \leq \ell + \varepsilon$ definitiv. per colpa del limsup

  $a_n \geq \ell - \varepsilon$ definitivamente per colpa del liminf

Quindi in conclusione $\ell - \varepsilon \leq a_n \leq \ell + \varepsilon$ defin.
e questo è quello che mi chiede la def. di limite.

— o — o —

ANALISI 1 — LEZIONE 093

Titolo nota 17/03/2015

<u>Teorema dei carabinieri</u> Supponiamo che

$$a_n \le b_n \le c_n \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \text{(basta definitiv.)}$$

Allora

$$\boxed{\liminf a_n \underset{\uparrow \text{ confronto } a_n \le b_n}{\le} \liminf b_n \underset{\uparrow \text{ ovvietà}}{\le} \limsup b_n \underset{\uparrow \text{ confronto } b_n \le c_n}{\le} \limsup c_n}$$

<u>Corollario</u> Se $a_n \to \ell \in \overline{\mathbb{R}}$ e $c_n \to \ell \in \overline{\mathbb{R}}$ (stesso ℓ), allora anche $b_n \to$ stesso ℓ.

<u>Dim.</u> I due laterali sono ℓ, quindi i due centrali sono ℓ, quindi $b_n \to \ell$ avendo liminf e limsup uguali

— o — o —

<u>Teorema delle sottosuccessioni</u> Sia a_n una successione, e sia a_{i_n} una sottosuccessione (si intende che i_n è una succ. strett. crescente di naturali).

Allora

$$\boxed{\liminf a_n \le \liminf a_{i_n} \underset{\uparrow \text{ ovvia}}{\le} \limsup a_{i_n} \le \limsup a_n}$$

<u>Corollario</u> Se $a_n \to \ell \in \overline{\mathbb{R}}$, allora i due laterali sono uguali, quindi i 2 centrali sono uguali, quindi $a_{i_n} \to \ell$.

$\boxed{\text{Dim del teo}}$ $S_k := \sup \underbrace{\{a_n : n \ge k\}}_{\cup\!/}$

$$\hat{S}_k := \sup \overbrace{\{a_{i_n} : n \ge k\}}$$

Allora $\hat{S}_k \leq S_k$ per ogni $k \in \mathbb{N}$ perché è il sup di "meno roba"

$\hat{S}_k$: limsup a_{i_n}, S_k: limsup a_n

Per il liminf è analogo con $\hat{I}_k \geq I_k$.

— o — o —

$\boxed{\text{MAXLIM e MINLIM}}$ "Massimo limite possibile per una sottosucc. che ha limite"

<u>Def.</u> Sia a_n una successione

$\boxed{1}$ Dico che $\max\lim a_n = +\infty$ se esiste una sottosuccessione
$$a_{i_n} \to +\infty$$

$\boxed{2}$ Dico che $\max\lim a_n = -\infty$ se $\lim a_n = -\infty$

$\boxed{3}$ Dico che $\max\lim a_n = L \in \mathbb{R}$ se

(i) Esiste una s.succ. $a_{i_n} \to L$

(ii) Ogni sottosucc. che ha limite, ha limite $\leq L$

$\boxed{\text{Teorema}}$ Per ogni successione a_n si ha che

$$\boxed{\limsup a_n = \max\lim a_n}$$

Brutalmente: se $\limsup a_n = 14$, allora c'è una sottosuccessione che tende a 14, e tutte le sottosuccessioni o non hanno limite, o hanno limite ≤ 14.

$\boxed{\text{Dim.}}$ Dal teorema delle sottosuccessioni è ovvio che

$$\boxed{\max\lim a_n \leq \limsup a_n}$$

Resta da dimostrare il viceversa, cioè che esiste sempre una s.succ che tende al limsup. Qui ci sono 3 casi

$\boxed{\text{Caso } \limsup = -\infty}$ Per la caratterizz. $a_n \to -\infty$ quindi basta usare lei come sottosucc.

$\boxed{\text{Caso } \limsup = +\infty}$ Ipotesi: a_n non è limitata sup

Tesi: esiste $a_{i_n} \to +\infty$, che posso prendere stretto. crescente.

Dim. Algoritmo:

- $\to$ scelgo a_{i_0} a caso in modo che $a_{i_0} \geq 0$
- $\to$ scelgo a_{i_1} in modo che $a_{i_1} \geq a_{i_0} + 1$ e $i_1 > i_0$
- $\to$ scelgo a_{i_2} in modo che $a_{i_2} \geq a_{i_1} + 1$ e $i_2 > i_1$

  $\vdots$
- $\to$ scelgo $a_{i_{k+1}}$ in modo che $a_{i_{k+1}} \geq a_{i_k} + 1$ e $i_{k+1} > i_k$

Ad ogni passaggio posso trovare l' indice richiesto perché a_n supera ogni barriera M per infiniti indici.

Per induzione si dimostra che

$a_{i_k} \geq k \quad \forall k \in \mathbb{N}$ (a ogni passaggio cresce almeno di uno)

Da qui segue che $a_{i_k} \to +\infty$.

$\boxed{\text{Caso } \limsup a_n = L \in \mathbb{R}}$ Ipotesi: $\limsup a_n = L \in \mathbb{R}$

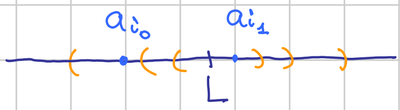
Tesi: esiste $a_{i_k} \to L$

Ricordo la caratterizzazione:

$\forall \varepsilon > 0$

$a_n \leq L + \varepsilon$ definitiv.

$a_n \geq L - \varepsilon$ frequentemente



Algoritmo:

→ prendo $\varepsilon = \frac{1}{2^0}$ e trovo a_{i_0} t.c.

$$L-1 \leq a_{i_0} \leq L+1$$ (ce ne sono ∞, basta prenderne 1)

→ prendo $\varepsilon = \frac{1}{2^1}$ e trovo a_{i_1} t.c. $i_1 > i_0$

$$L-\frac{1}{2} \leq a_{i_1} \leq L+\frac{1}{2}$$ (ce ne sono ∞, quindi ce n'è uno con indice $> i_0$)

⋮

→ supponendo di aver definito $a_{i_0}, a_{i_1}, \dots, a_{i_k}$, definisco $a_{i_{k+1}}$ in modo tale che $i_{k+1} > i_k$

$$\underbrace{\boxed{L-\frac{1}{2^{k+1}}}}_{\downarrow\, L} \leq a_{i_{k+1}} \leq \underbrace{\boxed{L+\frac{1}{2^{k+1}}}}_{\downarrow\, L}$$

Quindi per i Carabinieri $a_{i_k} \to L$.

— o — o —

Analogamente si definisce MINLIM a_n come minimo limite possibile e si dimostra che

$$\boxed{\text{minlim}\, a_n = \liminf a_n}$$

Conseguenza operativa Come dimostro che $\limsup a_n = L$?

SLOGAN
1. Disuguaglianza dall'alto
2. Sottosuccessione dal basso

Esempio 1 $a_n = (-1)^n \arctan n$

Idea: $\limsup a_n = \frac{\pi}{2}$, $\liminf a_n = -\frac{\pi}{2}$

① $a_n \leq \frac{\pi}{2}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, quindi per confronto

$$\limsup a_n \leq \frac{\pi}{2}$$

② Basta trovare una s.succ. che tende a $\frac{\pi}{2}$, in questo caso a_{2n}

Per il liminf è il contrario, cioè

① Disug. dal basso $a_n \geq -\frac{\pi}{2}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ da cui

$$\liminf a_n \geq -\frac{\pi}{2}$$

② S.succ. dall'alto, in questo caso $a_{2n+1} \to -\frac{\pi}{2}$

— o — o —

Esempio 2 $\quad a_n = \dfrac{(-1)^n n + \sqrt{n} + 3}{2n + (-1)^n \sqrt{n}}$

① $a_n \leq \boxed{\dfrac{n + \sqrt{n} + 3}{2n - \sqrt{n}}} \rightsquigarrow \limsup a_n \leq \frac{1}{2}$

$\downarrow \frac{1}{2}$

② S.succ. dal basso: $a_{2n} = \ldots \to \frac{1}{2} \Rightarrow \limsup a_n = \frac{1}{2}$

Analogamente per il liminf uso $a_{2n+1} \to -\frac{1}{2}$ e

$$a_n \geq \frac{-n + \sqrt{n} + 3}{2n - \sqrt{n}} \to -\frac{1}{2}$$

↑ occhio alle disuguaglianze

Se $A \geq B$ e $C \leq D$, è vero che $\frac{A}{C} \geq \frac{B}{D}$?

NI: OK se è tutto positivo, altrimenti occhio

Andava bene anche

$$a_n \geq \frac{-n + \sqrt{n} + 3}{2n + (-1)^n \sqrt{n}} \to -\frac{1}{2}$$

$A \geq B$ e $C > 0$

$\Rightarrow \frac{A}{C} \geq \frac{B}{C}$.

— o — o —

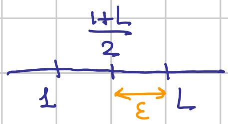
ANALISI 1 — LEZIONE 094

Titolo nota 17/03/2015

$\boxed{\text{Criterio della radice}}$ Sia $a_n \geq 0$ definitivamente

- Se $\liminf \sqrt[n]{a_n} > 1$, allora $a_n \to +\infty$ e $\sum a_n = +\infty$
- Se $\limsup \sqrt[n]{a_n} < 1$, allora $a_n \to 0$ e $\sum a_n$ converge

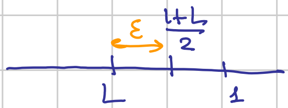
$\boxed{\text{Dim.}}$ Supponiamo $\liminf \sqrt[n]{a_n} = L > 1$



Allora per la caratt. $\sqrt[n]{a_n} \geq \frac{1+L}{2}$ definitiv., quindi

$$a_n \geq \left(\frac{1+L}{2}\right)^n \quad \text{da cui la tesi}$$

Supponiamo $\limsup \sqrt[n]{a_n} = L < 1$



Allora $\sqrt[n]{a_n} \leq \frac{1+L}{2}$ definitiv., quindi

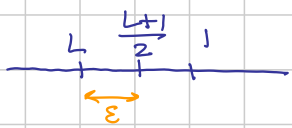
$$0 \leq a_n \leq \left(\frac{1+L}{2}\right)^n$$ da cui la tesi, sia per la succ., sia per la serie.

— o — o —

$\boxed{\text{Criterio del rapporto}}$ Supponiamo $a_n > 0$ definitiv.

- Se $\liminf \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$, allora $a_n \to +\infty$ e $\sum a_n = +\infty$
- Se $\limsup \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, allora $a_n \to 0$ e $\sum a_n$ converge

$\boxed{\text{Dim.}}$ Facciamo solo la 2ª (la 1ª ... esercizio)



Definitivamente, cioè $\forall n \geq n_0$ dato

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{L+1}{2} \quad \forall n \geq n_0, \text{ cioè } a_{n+1} \leq \frac{L+1}{2} a_n$$

(qui uso $a_n > 0$)

da cui per induzione

$$0 \leq a_n \leq \left(\frac{L+1}{2}\right)^{n-n_0} a_{n_0} \qquad \forall n \geq n_0$$

e da qui si chiude con i carabinieri.

— o — o —

$\boxed{\text{Criterio rapporto radice}}$ Supponiamo che $a_n > 0$ definitivamente. Allora

ovvia

$$\boxed{\liminf \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \liminf \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup \frac{a_{n+1}}{a_n}}$$

Questo implica l'enunciato antico nel caso in cui $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ ha limite

$\boxed{\text{Dim.}}$ Dimostriamo la disug. di dx. Se $\limsup \frac{a_{n+1}}{a_n} = +\infty$ c'è poco da dimostrare. Quindi non essendo possibile $-\infty$ resta solo il caso in cui $\limsup \frac{a_{n+1}}{a_n} = L \in \mathbb{R}$.

Fisso $\varepsilon > 0$. Allora per la caratterizzazione esiste $n_0 \in \mathbb{N}$ t.c.

L L+ε

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq L + \varepsilon \qquad \forall n \geq n_0$$

Da qui per induzione come sempre ottengo

$$a_n \leq (L+\varepsilon)^{n-n_0} a_{n_0}$$

Faccio la radice n-esima e ottengo

$$\sqrt[n]{a_n} \leq \sqrt[n]{(L+\varepsilon)^{n-n_0} a_{n_0}} = (L+\varepsilon) \sqrt[n]{\frac{a_{n_0}}{(L+\varepsilon)^{n_0}}}$$

Per il confronto a 2 faccio limsup a dx e sx e ottengo

$$\limsup \sqrt[n]{a_n} \leq L+\varepsilon$$

(ho usato che $\sqrt[n]{A} \to 1$ per ogni costante A, cosa che va dimostrata prima con Bernoulli)

Poichè ε è arbitrario, abbiamo ottenuto che

$\limsup \sqrt[n]{a_n} \leq L$, cioè la tesi.

— o — o —

Oss. Se non posso usare il limsup, quando arrivo a

$$\sqrt[n]{a_n} \leq (L+\varepsilon)\sqrt[n]{\text{costante}}$$

non posso fare i limiti a dx e sx.

Un modo è dire che RHS $\to L+\varepsilon$, quindi definitiv. RHS $\leq L+2\varepsilon$, quindi definit. anche LHS $\leq L+2\varepsilon$.

Si faceva il discorso con il $\geq$ e si chiude.

— o — o —

$\boxed{\text{TEOREMI ALGEBRICI}}$ Non valgono come uno vorrebbe...

$$\limsup (a_n+b_n) \neq \limsup a_n + \limsup b_n$$
$$\liminf (\quad) \neq \liminf a_n + \liminf b_n$$

Esempio

$a_n =$	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
$b_n =$	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0
$a_n+b_n =$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

$\boxed{\text{Teorema per la somma}}$ Siano a_n e b_n due successioni. Allora

$$\boxed{\liminf a_n + \liminf b_n \leq \liminf (a_n+b_n) \overset{\text{ovvia}}{\leq} \limsup (a_n+b_n) \leq \limsup a_n + \limsup b_n}$$

tranne nei casi in cui c'è $+\infty - \infty$ in qualche modo

$\boxed{\text{Dim.}}$ Dimostro solo quella di destra. Pongo $c_n = a_n + b_n$ e chiamo S_k^a, S_k^b, S_k^c i tre sup della definizione.
Allora

$$S_k^c \leq S_k^a + S_k^b \qquad \forall k \in \mathbb{N}$$

da cui la tesi.
Perché è vera?

$$a_n \leq S_k^a \qquad \forall n \geq k$$
$$b_n \leq S_k^b \qquad \forall n \geq k$$

quindi

$$c_n = a_n + b_n \leq S_k^a + S_k^b \qquad \forall n \geq k$$

quindi

$$S_k^c = \sup\{c_n : n \geq k\} \leq \underbrace{S_k^a + S_k^b}_{\text{è un maggiorante}}$$

— o — o —

<u>Moltiplicazione per una costante</u> Moltiplichiamo per -1:

$$\limsup(-a_n) = -\liminf a_n$$
$$\liminf(-a_n) = -\limsup a_n$$

<u>Oss.</u> In generale
→ se moltiplico per $\lambda > 0$ va tutto bene
→ se " " $\lambda < 0$ si inverte tutto.

<u>Achtung!</u> Non provare a tirare fuori formule creative per $a_n \cdot b_n$, tranne nel caso in cui è tutto positivo.

— o — o —

<u>Proposizione</u> Supponiamo che $a_n \to a_\infty > 0$ e sia b_n un'altra successione.
Allora

$$\limsup(a_n b_n) = a_\infty \limsup b_n$$

<u>Dim.</u> Fisso $\varepsilon > 0$

$$b_n \leq S_k^b \qquad \forall n \geq k$$
$$0 \leq a_n \leq a_\infty + \varepsilon \qquad \forall n \geq n_0$$

Quindi se $n \geq k \geq n_0$ si avrà che

$$a_n b_n \leq (a_\infty + \varepsilon) S_k^b \qquad \forall n \geq k$$

Da qui si deduce che $S_k^c \leq (a_\infty + \varepsilon) S_k^b$ e passando al limite ottengo

$$\limsup_{n \to +\infty} a_n b_n \leq (a_\infty + \varepsilon) \limsup b_n$$

Poiché ε è arbitrario ho una disuguaglianza.
Per avere la stima dal basso uso la sottosuccessione che tende $b_{i_n} \to \limsup b_n$

$$a_{i_n} \cdot b_{i_n} \to a_\infty \cdot \limsup b_n.$$

— o — o —

<u>Esempio</u> $\quad x_{n+1} = a_n x_n + b_n$

Sappiamo che $a_n \to \frac{1}{3}$ e $b_n \to 5$. Vorremmo dedurre

$$\begin{array}{ccccccc} x_{n+1} & = & a_n & x_n & + & b_n \\ \downarrow & & \downarrow & \downarrow & & \downarrow \\ \ell & = & \frac{1}{3} & \ell & + & 5 \end{array} \quad \rightsquigarrow \frac{2}{3}\ell = 5 \rightsquigarrow \ell = \frac{15}{2}$$

Perché non si poteva? Perché anche avendo dim. che x_n è limitata (cosa non difficile), non sapremmo che esiste il limite.
Ora possiamo chiamare L il limsup e dire che

$$L \leq \frac{1}{3} L + 5 \qquad \text{da cui } L \leq \frac{15}{2}$$

e posso fare la stessa cosa con il liminf.

<u>Esercizio</u> Nel $\limsup (a_n + b_n)$ vale il segno di $=$ se uno dei due è un limite.

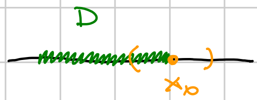
ANALISI 1 — LEZIONE 095

Titolo nota 18/03/2015

LIMINF E LIMSUP DI FUNZIONI $\liminf\limits_{x \to x_0} f(x)$ $\limsup\limits_{x \to x_0} f(x)$

In generale $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ (anche x_0^+ e x_0^-).

Def. Sia $D \subseteq \mathbb{R}$, sia $f : D \to \mathbb{R}$ una funzione, sia $x_0 \in \mathbb{R}$.
Supponiamo che x_0 sia un p.to di accumulazione per D, cioè $\forall r > 0$ l'insieme $[(x_0 - r, x_0 + r) \cap D] \setminus \{x_0\} \neq \emptyset$.
Allora ci sono due casi:



1. Se per ogni $r > 0$ si ha che

$$\sup \{ f(x) : x \in [(x_0 - r, x_0 + r) \cap D] \setminus \{x_0\} \} = +\infty$$

allora si pone

$$\boxed{\limsup_{x \to x_0} f(x) = +\infty}$$

2. Altrimenti vuol dire che $\exists r_0 > 0$ t.c.

$$S_r := \sup \{ f(x) : x \in \ldots \} < +\infty \qquad \forall r < r_0$$

Inoltre per ogni $0 < r_1 < r_2$ si ha che $S_{r_1} \leq S_{r_2}$, quindi S_r ha limite per $r \to 0^+$ e si pone

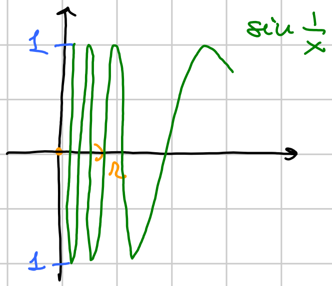
$$\boxed{\limsup_{x \to x_0} f(x) = \lim_{r \to 0^+} S_r = \inf_{r > 0} S_r} \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$$

Analogamente si definisce il $\liminf\limits_{x \to x_0} f(x_0)$, facendo sostanzialmente

$$\lim_{r \to 0^+} I_r = \lim_{r \to 0^+} \inf \{ f(x) : x \in [(x_0 - r, x_0 + r) \cap D] \setminus \{x_0\} \}$$

Esempio 1 $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ $x_0 = 0^+$

$D = (0, +\infty)$



$$\limsup_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{r \to 0^+} \overbrace{\sup\{f(x) : x \in (0,r)\}}^{=1 \ \forall r > 0}$$

$$= \lim_{r \to 0^+} 1 = 1$$

Analogamente $\liminf\limits_{x \to 0^+} \sin \frac{1}{x} = -1$.

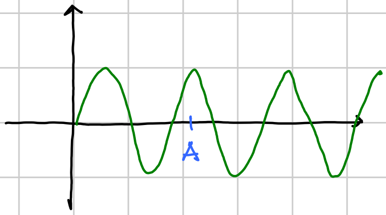
— o — o —

I teoremi di confronto sono analoghi alle successioni

Anche per i teoremi algebrici la situazione è la stessa, cioè si può dire molto poco.

— o — o —

Esempio 2 $\liminf\limits_{x \to +\infty} \sin x$ $\limsup\limits_{x \to +\infty} \sin x$ $D = \mathbb{R}$

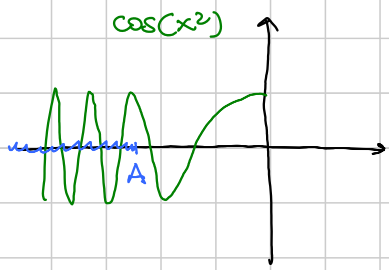


$$\limsup_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{A \to +\infty} \overbrace{\sup\{f(x) : x > A\}}^{=1 \text{ per ogni } A > 0}$$

$$= \lim_{A \to +\infty} 1 = 1$$

$$\liminf_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{A \to +\infty} \underbrace{\inf\{f(x) : x > A\}}_{= -1 \text{ per ogni } A > 0} = -1$$

Esempio 3 $\limsup\limits_{x \to -\infty} \cos x^2$ $\liminf\limits_{x \to -\infty} \cos x^2$



$$\limsup_{x \to -\infty} f(x) =$$

$$= \lim_{A \to -\infty} \sup\{f(x) : x < A\} = 1$$

Analogamente $\liminf\limits_{x \to -\infty} \cos(x^2) = -1$.

— o — o —

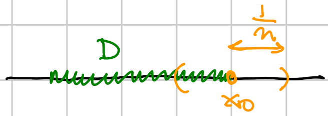
CARATTERIZZAZIONE DI LIMSUP COME MAXLIM

Caso 1 $\limsup_{x \to x_0} f(x) = +\infty \iff \exists\, x_n \to x_0 \quad x_n \in D \setminus \{x_0\}$ tale che $f(x_n) \to +\infty$

Dim. $\boxed{\Rightarrow}$ Ipotesi: $\limsup = +\infty$ Tesi: $\exists$ successione

basta tenda a 0

Uso ampiezze $r = \boxed{\frac{1}{n}}$. Per ipotesi nella zona



$$\left[\left(x_0 - \frac{1}{n}, x_0 + \frac{1}{n} \right) \cap D \right] \setminus \{x_0\}$$

Il sup della funzione è $+\infty$, quindi esiste x_n nella zona in cui $f(x_n) \geq n$. (posso superare ogni barriera, quindi anche n)

basta tenda a $+\infty$

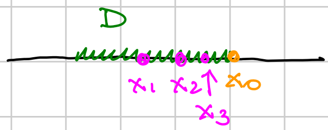
La successione x_n ha la proprietà richiesta: infatti

$$x_0 - \frac{1}{n} \leq x_n \leq x_0 + \frac{1}{n} \quad \Rightarrow \quad x_n \to x_0$$

$$f(x_n) \geq n \quad \Rightarrow \quad f(x_n) \to +\infty$$

$\boxed{\Leftarrow}$ Ipotesi: $\exists$ succ. Tesi: $\limsup = +\infty$

Poiché $x_n \to x_0$ e $f(x_n) \to +\infty$ è chiaro che



$$\sup \{ f(x) : x \in [(x_0 - r, x_0 + r) \cap D] \setminus \{x_0\} \} = +\infty \quad \forall r > 0$$

perché bastano i p.ti della succ. per passare ogni barriera.
Quindi $\limsup = +\infty$

$\boxed{\text{Caso 2}}$ $\limsup_{x \to x_0} f(x) = L \in \mathbb{R}$. Allora succedono 2 cose

(i) $\exists\ x_n \to x_0$ $\quad x_n \in D \setminus \{x_0\}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ $\quad$ t.c. $f(x_n) \to L$

(ii) per ogni successione $x_n \to x_0$ con $x_n \in D \setminus \{x_0\}$ $\forall n \in \mathbb{N}$
se $f(x_n) \to M$, allora $M \le L$

Brutalmente: L è il massimo limite possibile per $f(x_n)$ quando $x_n \to x_0$

$\boxed{\text{Dim.}}$ Devo costruire x_n. Per ipotesi $\limsup = L$, quindi

$$\lim_{r \to 0^+} \underbrace{\sup\{f(x) : x \in \dots\}}_{S_r} = L$$

posso chiederlo perché vale in tutti gli r abb. piccoli

Fisso $\varepsilon = \frac{1}{n}$. Per ipotesi esiste $r_n > 0$ t.c. $\boxed{r_n \le \frac{1}{n}}$ e

$$L \le S_{r_n} \le L + \frac{1}{n}$$

perché tutti gli S_r sono $\ge L$

Ma allora esiste $x_n \in [(x_0 - r_n, x_0 + r_n) \cap D] \setminus \{x_0\}$ tale che

$$L - \frac{1}{n} \le f(x_n) \le L + \frac{1}{n}$$

se non esistesse un p.to con questa proprietà si avrebbe $S_{r_n} \le L - \frac{1}{n}$ il che è falso

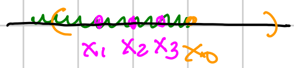
vera per ogni p.to nell' intorno $(x_0 - r_n, x_0 + r_n) \cap D \dots$

Da questa è automatico che $f(x_n) \to L$.
Inoltre $x_n \to x_0$ perché $r_n \to 0$ e

$$x_0 - r_n \le x_n \le x_0 + r_n$$

Questo dimostra (i).

Per dimostrare (ii) basta osservare che fissato $\varepsilon > 0$ $\exists\, r > 0$ t.c.



$$S_r \le L + \varepsilon$$

Inoltre definitivamente $x_n \in (x_0 - r, x_0 + r)$, quindi definitivamente $f(x_n) \le L + \varepsilon$, quindi se $f(x_n)$ ha limite M per forza

$$M \le L + \varepsilon$$

Essendo vero per ogni $\varepsilon > 0$, per forza $M \le L$.

— o — o —

$\boxed{\text{Caso 3}}$ $\limsup\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty \iff \forall\, x_n \to x_0 \quad x_n \in D \setminus \{x_0\}$

$$f(x_n) \to -\infty$$

$$\iff \lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$$

— o — o —

ANALISI 1 – LEZIONE 096

Titolo nota 18/03/2015

Esercizio 1 Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ tale che $\sup A = +\infty$.
Allora esiste una successione $\{x_n\} \subseteq A$ strett. cresc. e tale che

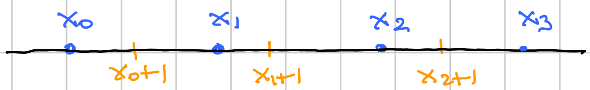
$$x_n \to +\infty$$

$\boxed{\text{Dim.}}$ La definisco induttivamente

- Scelgo $x_0 \in A$ a caso
- Supponendo di aver già definito $x_0, x_1, \dots, x_k$, scelgo $x_{k+1} \in A$ t.c.

$$x_{k+1} \geq x_k + 1$$

Perchè lo trovo? Per definizione di $\sup A = +\infty$ per ogni $M \in \mathbb{R}$ esiste $a \in A$ t.c. $a \geq M$. Quindi basta prendere $M = x_k + 1$



Perché $x_k \to +\infty$? Perché per induzione dimostro che

$$x_k \geq x_0 + k$$

da cui concludo per confronto.

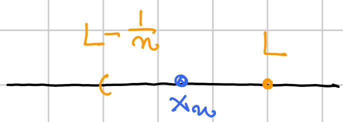
— o — o —

Esercizio 2 Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ tale che $\sup A = L \in \mathbb{R}$.
Allora esiste una succ. $\{x_n\} \subseteq A$ debolmente crescente t.c.

$$x_n \to L$$

$\boxed{\text{Dim.}}$ Per ogni $n \geq 1$ scelgo $\varepsilon = \frac{1}{n}$
e uso la caratterizzazione, trovando $x_n \in A$ t.c.

basta qualunque cosa che tenda a 0.



$$L - \frac{1}{n} \leq x_n \leq L.$$ Da qui è ovvio che $x_n \to L$
Così però non ho garantito che sia debolmente crescente.

Distinguiamo 2 casi:

$\boxed{\text{Caso 1}}$ $L \in A$. Allora prendo $x_n = L$ per ogni $n \in \mathbb{N}$

$\boxed{\text{Caso 2}}$ $L \notin A$. Allora in questo posso prendere x_n addirittura strettamente crescente.

L'algoritmo è questo

- Scelgo x_0 a caso
- Supponendo di aver scelto $x_0, \dots, x_k$, prendo x_{k+1} in maniera tale che

$$x_k < x_{k+1}$$

$$L - \frac{1}{k} < x_{k+1}$$

Posso farlo perché uso la caratterizzazione con

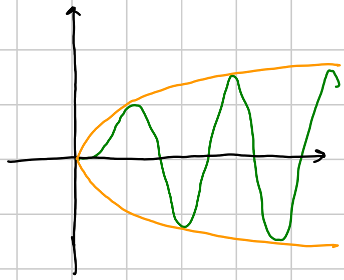
$$\varepsilon = \min\left\{\frac{1}{k}, L - x_k\right\}$$

↑ basta qualunque cosa che tenda a 0.

e trovo di sicuro $L - \varepsilon < x_{k+1} < L$

— o — o —

Esercizio 3 $\limsup_{x \to +\infty} \sin x \cdot \arctan x$



Idea: $\limsup = \frac{\pi}{2}$ $\liminf = -\frac{\pi}{2}$

Dimostrazione rigorosa:

① Disuguaglianza dall'alto

$$\sin x \cdot \arctan x \leq \arctan x$$

è limite

$$\Rightarrow \limsup_{x \to +\infty} \sin x \cdot \arctan x \leq \limsup_{x \to +\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}$$

② Successione dal basso Devo trovare $x_n \to +\infty$ t.c. $f(x_n) \to \frac{\pi}{2}$

Basta fare in modo che $\sin x_n = 1$, ad esempio $x_n = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$

Analogamente si fa il liminf.

Esercizio 4 $f(x) = \cos x \cdot \sin \frac{1}{x}$

Per $x \to +\infty$ si ha $\liminf_{x \to +\infty} f(x) = \limsup_{x \to +\infty} f(x) = 0 = \lim_{x \to +\infty} f(x)$

Basta osservare che

$$0 \leq |f(x)| \leq \underbrace{\left|\sin \frac{1}{x}\right|}_{\to 0 \text{ per } x \to +\infty}$$

Per $x \to 0^+$ si ha $\liminf_{x \to 0^+} f(x) = -1$, $\limsup_{x \to 0^+} f(x) = +1$

Dimostro il liminf.

(1) Disuguaglianza dal basso: $\cos x \cdot \sin \frac{1}{x} \geq -\cos x$

vale in un intorno di 0 dove $\cos x \geq 0$

da cui per confronto $\liminf_{x \to 0^+} f(x) \geq -1$

(2) Successione dall'alto: devo trovare $x_n \to 0^+$ t.c. $f(x_n) \to -1$
Basta fare in modo che $\sin \frac{1}{x_n} = -1$, quindi

$$\frac{1}{x_n} = \frac{3\pi}{2} + 2n\pi \quad \rightsquigarrow \quad x_n = \frac{1}{\frac{3\pi}{2} + 2n\pi} \to 0^+ \quad \text{e}$$

$$f(x_n) = \underbrace{\cos x_n}_{\downarrow\, 0} (-1) \to -1$$

Esercizio 5 $\quad f(x) = e^{x^2 \cos^2(x^3)}$

$$\liminf_{x \to +\infty} f(x) = 1 \qquad \limsup_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

Per limsup $= +\infty$ basta fare la succ. dal basso, cioè trovare $x_n \to +\infty$ t.c. $f(x_n) \to +\infty$. Basta fare in modo che

$\cos^2(x_n^3) = 1$, ad esempio $x_n^3 = 2\pi n \quad x_n = \sqrt[3]{2\pi n} \to +\infty$

Per il liminf

① Disuguaglianza dal basso: $f(x) \geq 1$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, quindi $\liminf_{x \to +\infty} f(x) \geq 1$

② Successione dall'alto: devo trovare $x_n \to +\infty$ t.c. $f(x_n) \to 1$. Basta fare in modo che $\cos(x_n^3) = 0$, ad esempio

$$x_n^3 = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$$

e da qui si conclude.

— o — o —

Esercizio 6 $\quad$ Se $a_n \to a_\infty$ (quindi ha limite $a_\infty \in \mathbb{R}$), allora

$$\limsup (a_n + b_n) = a_\infty + \limsup b_n$$

(se uno dei 2 è limite, allora c'è la formula per limsup della somma)

$\boxed{\text{Dim 1}}$ Uso la definizione ponendo $c_n = a_n + b_n$ e introducendo i sup S_k^a, S_k^b, S_k^c. Allora

$$a_n \leq S_k^a \qquad \forall n \geq k$$
$$b_n \leq S_k^b \qquad \forall n \geq k$$

e quindi $\quad c_n \leq S_k^a + S_k^b \qquad \forall n \geq k$

quindi $S_k^c \leq S_k^a + S_k^b \quad \forall k$, ma allora passando al limite in k si arriva a

$$\limsup (a_n+b_n) \leq \lim(\sup) a_n + \limsup b_n$$

e da qui si ottiene una disuguaglianza, che già sapevamo

Ottenere quella opposta è più complicato.
Fisso $\varepsilon > 0$ allora per n abbastanza grande abbiamo

$$a_n \geq a_\infty - \varepsilon$$

quindi

$$c_n = a_n + b_n \geq a_\infty - \varepsilon + b_n$$

quindi

$$S_k^c \geq a_\infty - \varepsilon + S_k^b \qquad \text{per } k \text{ abbastanza grande}$$

Passando al limite in k otteniamo

$$\limsup (a_n+b_n) \geq a_\infty - \varepsilon + \limsup b_n$$

Essendo ε arbitrario abbiamo la disuguaglianza voluta.

$\boxed{\text{Dim. 2}}$ Dal teorema generale otteniamo la stima dall'alto

$$\limsup (a_n+b_n) \leq a_\infty + \limsup b_n$$

Per la disuguaglianza opposta uso la successione dal basso.
Sappiamo per ipotesi che esiste $b_{i_n} \to \limsup b_n$.
Ma allora uso la stessa s.succ. sui c e ottengo

$$c_{i_n} = \underset{\downarrow \atop a_\infty}{a_{i_n}} + b_{i_n} \to a_\infty + \limsup b_n$$

quindi

$$\limsup (a_n+b_n) \geq a_\infty + \limsup b_n.$$

ANALISI 1 — LEZIONE 097

Titolo nota 20/03/2015

Nomenclatura topologica in $\mathbb{R}$

Def. Sia $D \subseteq \mathbb{R}$ un sottoinsieme, e sia $x_0 \in \mathbb{R}$ (può essere o non essere in D). Si dice che

1 – x_0 è interno a D se

$$\exists r > 0 \text{ t.c. } (x_0 - r, x_0 + r) \subseteq D$$

↑ esiste intervallino tutto contenuto in D

2 – x_0 è aderente a D se

$$\forall r > 0 \quad (x_0 - r, x_0 + r) \cap D \neq \emptyset$$

ogni intervallino interseca D

3 – x_0 è di frontiera per D se

$$\forall r > 0 \quad (x_0 - r, x_0 + r) \cap D \neq \emptyset \text{ e } (x_0 - r, x_0 + r) \cap (\mathbb{R} \setminus D) \neq \emptyset$$

ogni intervallino interseca sia D sia il complementare di D

4 – x_0 è isolato in D se

$$\exists r > 0 \text{ t.c. } (x_0 - r, x_0 + r) \cap D = \{x_0\}$$

esiste un interv. in cui c'è solo x_0

5 – x_0 è di accumulazione per D se

$$\forall r > 0 \quad [(x_0 - r, x_0 + r) \cap D] \setminus \{x_0\} \neq \emptyset$$

(in ogni intervallino centrato in x_0 ci sono p.ti di D $\neq x_0$

— o — o —

Esempio $D = [0, 1)$ $x_0 = 0$ è aderente, di frontiera, di accumulazione

$x_0 = 1$ pure

$x_0 = 1/5$ è interno

Def. Sia $D \subseteq \mathbb{R}$. Allora si chiama

1 – parte interna di D l'insieme dei p.ti interni; si indica con $\text{Int}(D)$ oppure $\mathring{D}$

2 – chiusura di D l'insieme dei p.ti aderenti $\text{Clos}(D)$ $\overline{D}$

3 – frontiera di D l'insieme dei p.ti di frontiera ∂D

4 – $\text{Isol}(D)$ = insieme dei p.ti isolati

5 – $\mathcal{D}(D)$ = derivato di D = insieme dei p.ti di accumulazione (insiemi dei p.ti in cui ha senso fare il limite)

Esempi $D = [0,1)$. Allora

$$\text{Int}(D) = \mathring{D} = (0,1)$$
$$\text{Clos}(D) = \overline{D} = [0,1]$$
$$\partial D = \{0,1\}$$
$$\text{Isol}(D) = \emptyset$$
$$\mathcal{D}(D) = [0,1]$$

$A = \mathbb{Q}$. Allora

$$\text{Int}(A) = \emptyset$$
$$\text{Clos}(A) = \mathbb{R}$$
$$\partial(A) = \mathbb{R}$$
$$\text{Isol}(A) = \emptyset$$
$$\mathcal{D}(A) = \mathbb{R}$$

$B = (0,1) \cup (1,2) \cup \{3\}$

$$\text{Int}(B) = (0,1) \cup (1,2)$$
$$\text{Clos}(B) = [0,2] \cup \{3\}$$
$$\partial(B) = \{0,1,2,3\}$$
$$\text{Isol}(B) = \{3\}$$
$$\mathcal{D}(B) = [0,2]$$

$\boxed{\text{L'esercizio}}$ Dato $A \subseteq \mathbb{R}$ scrivo

A, $\text{Int}(A)$, $\text{Clos}(\text{Int}(A))$, $\text{Int}(\text{Clos}(\text{Int}(A)))$, ...
$\text{Clos}(A)$, $\text{Int}(\text{Clos}(A))$, $\text{Clos}(\text{Int}(\text{Clos}(A)))$, ...

Quanti insiemi diversi posso ottenere?

Analogo: $A \to \partial(A) \to \partial(\partial(A)) \rightsquigarrow \dots$

— o — o —

Proprietà immediate (esercizio)

$$\text{Int}(D) \subseteq D \subseteq \text{Clos}(D)$$
$$\text{Isol}(D) \subseteq D$$
$$\partial(D) \subseteq \text{Clos}(D)$$
$$\partial(D) = \text{Clos}(D) \setminus \text{Int}(D)$$

$\boxed{\text{Dim.}}$ È ovvio che $\partial D \subseteq \text{Clos}(D)$.

Prendiamo un pto $x_0 \in \text{Clos}(D)$. Ci sono due casi

- $\forall r > 0$ $(x_0 - r, x_0 + r) \cap (\mathbb{R} \setminus D) \neq \emptyset$. Allora x_0 non è interno e sta sulla frontiera
- $\exists r > 0$ $(x_0 - r, x_0 + r) \cap (\mathbb{R} \setminus D) = \emptyset$, quindi $(x_0 - r, x_0 + r) \subseteq D$

quindi $x_0 \in \text{Int}\, D$.

$$\partial D \cap \text{Int}(D) = \emptyset$$

$\text{Clos}(D) = D(D) \cup \text{Isol}(D)$ e l'unione è disgiunta.

— o — o —

Proprietà Se $A \subseteq B$, allora
$$Int(A) \subseteq Int(B)$$
$$Clos(A) \subseteq Clos(B)$$
Per la frontiera non ci sono inclusioni.
$$\partial(A) \subseteq \partial(B)$$

Unioni e intersezioni

$Clos(A \cup B) = ?$ $Clos(A \cap B) = ?$

$Int(A \cup B) = ?$ $Int(A \cap B) = ?$

Def. Sia $A \subseteq \mathbb{R}$. Allora A si dice
1 - aperto se $A = Int(A)$
2 - chiuso se $A = Clos(A)$

Unioni e intersezioni
1 - L'unione di 2 aperti è un aperto
2 - L'intersezione di 2 aperti è un aperto
3 - Idem per i chiusi

Famiglie infinite di insiemi $\{A_i\}_{i \in I}$ indica una famiglia di sottoinsiemi. È una funzione da un insieme di indici I (finito o infinito) a valori nei sottoinsiemi di $\mathbb{R}$

Esempi $\{(x, x+3)\}_{x \in \mathbb{R}}$ è una famiglia di intervalli
↑
indici

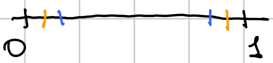
Fatti ① L'unione qualunque di aperti è un aperto

Se $\{A_i\}_{i \in I}$ è t.c. A_i è aperto per ogni $i \in I$, allora
$$\bigcup_{i \in I} A_i \text{ è aperta}$$

② L'intersezione qualunque di chiusi è un chiuso

$\boxed{\text{MA}}$ non valgono i viceversa, cioè unione qualunque di chiusi può non essere chiuso, e l' int. qualunque di aperti può non essere aperto

<u>Esempi</u> $\left[\frac{1}{n}, 1-\frac{1}{n}\right] = A_n$ sono intervalli chiusi



$\bigcup_{n\geq 3} A_n = (0,1)$ è aperto

Burocratico : ogni $A \subseteq \mathbb{R}$ lo posso scrivere come unione di chiusi

$$A = \bigcup_{x\in A} \{x\}$$

↑ i pti sono chiusi

$\left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = B_n$ aperto $\qquad \bigcap_{n\geq 1} B_n = \{0\}$ = chiuso

$\left(-\frac{1}{n}, 7+\frac{1}{n}\right)$ ⇝ stessa cosa

<u>Oss.</u> A è aperto $\iff$ $\mathbb{R}\setminus A$ è chiuso

— o — o —

<u>Topologia</u> = dichiarare l'insieme degli aperti

— o — o —

<u>Esercizio</u> Trovare chiusi A_n, con $A_{n+1} \subseteq A_n$ tale che

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \emptyset \quad \text{e} \quad A_n \neq \emptyset \text{ per ogni } n\in\mathbb{N}$$

Basta prendere $A_n = [n, +\infty)$

Non è possibile se sono limitati !!!!

— o — o —

ANALISI 1 – LEZIONE 098

Titolo nota 24/03/2015

FIL ROUGE DI ANALISI 1

Assiomi di $\mathbb{R} \Rightarrow \dots \Rightarrow W \Rightarrow R \Rightarrow C \Rightarrow L$

$C \Downarrow H \Downarrow T$, $L \Downarrow M$

WEIERSTRASS
ROLLE
CAUCHY
LAGRANGE
HOPITAL
TAYLOR
MONOTONIA

Teorema di WEIERSTRASS (versione edulcorata)

Sia $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ continua. Allora esistono per forza

con estremi

$$\max \{ f(x) : x \in [a,b] \}$$
$$\min \{ f(x) : x \in [a,b] \}$$

Dove cerco i p.ti di max / min ?

1. Staz. int. : p.ti $x_0 \in (a,b)$ t.c. $f'(x_0) = 0$
2. Sing. int. : p.ti $x_0 \in (a,b)$ t.c. $f'(x_0)$ non esiste
3. Bordo : p.ti $x_0 \in \{a,b\}$

Dim. Sia x_0 p.to di max (wlog)

→ Se $x_0 \in \{a,b\}$ sta in 3 ed è ok

→ Se $x_0 \in (a,b)$ e $f'(x_0)$ non esiste, allora ok in 2

→ Resta il caso in cui $x_0 \in (a,b)$ e $f'(x_0)$ esiste. Devo dim. che $f'(x_0) = 0$

<u>Lemma</u> Se $x_0 \in (a,b)$ è p.to di max, e $f'(x_0)$ esiste, allora $f'(x_0) = 0$.

$\boxed{\text{Dim. 1}}$ Via monotonia 1. Supponiamo per assurdo che

- $f'(x_0) > 0$. Allora un po' a dx di x_0 si ha $f(x) > f(x_0)$ il che è contro l'essere x_0 p.to di max
- $f'(x_0) < 0$. Allora un po' a sx di x_0 si ha $f(x) > f(x_0)$ il che è assurdo come prima.

Resta solo $f'(x_0) = 0$.

$\boxed{\text{Dim. 2}}$ Per via diretta. Considero il rapporto incrementale

$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

- Per $h > 0$ si ha denom > 0 e num ≤ 0, quindi frazione ≤ 0. Passando al limite

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \leq 0$$

- Per $h < 0$ si ha denom. < 0 e num. ≤ 0, quindi fraz. ≥ 0. Passando al limite

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \geq 0$$

Resta solo $f'(x_0) = 0$.

— o — o —

<u>Esercizio classico</u> Supponiamo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivabile. Supponiamo che

$$f(a) = \max\{f(x) : x \in [a,b]\}$$

Cosa possiamo dire di $f'(a)$. E se fosse minimo? E se fosse in b?

— o — o —

Teorema di ROLLE Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Supponiamo che

(i) f continua in $[a,b]$

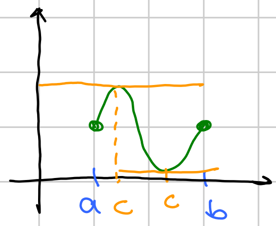
(ii) f derivabile in (a,b) (se lo è ovunque, ancora meglio)

(iii) $f(a) = f(b)$.

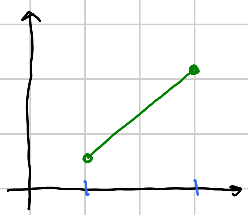
Allora

$$\exists\, c \in (a,b) \quad \text{t.c.} \quad f'(c) = 0$$

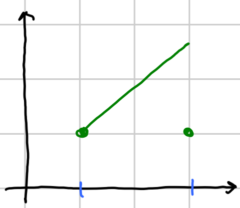
<u>Disegno</u> Ovviamente c può non essere unico



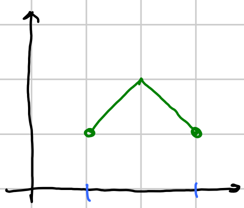
<u>Ottimalità delle ipotesi</u>



manca (iii)



manca (i)



manca (ii)

Dim. Per W sappiamo che esistono max e min.

Ci sono 2 casi

1. Se almeno uno dei p.ti di max/min sta in (a,b), allora per forza lì si annulla f' (non può essere singolare per la (ii))
2. Se i p.ti di max/min sono sul bordo, per la (iii) la funzione è costante, ma a quel p.to ogni $c \in (a,b)$ va bene.

— o — o —

<u>Oss.</u> Nell'ipotesi (ii) si assume solo la derivabilità, ma MAI la continuità della derivata.

Teorema di CAUCHY Siano $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ e $g: [a,b] \to \mathbb{R}$.
Supponiamo che
(i) f e g continue in $[a,b]$
(ii) f e g derivabili in (a,b).
Allora esiste $c \in (a,b)$ (non nec. unico) tale che

$$\boxed{[f(b)-f(a)]\,g'(c) = [g(b)-g(a)]\,f'(c)}$$

Se inoltre assumiamo anche che
(iii) $g'(x) \neq 0$ per ogni $x \in (a,b)$
allora si ha che $g(b) \neq g(a)$ da cui dividendo ottengo

$$\boxed{\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}}$$

Esempio $[a,b] = [-1,1]$, $f(x) = x^2$, $g(x) = x^3$. Allora

$f(b)-f(a) = 0$, $g(b)-g(a)=2$ quindi nella 2ª tesi LHS $=0$.
Tuttavia non c'è nessun c che rende $=0$ il RHS, perché $f'(x) = 2x$, quindi dovrei prendere $c=0$ ma allora anche $g'(c)=0$.

Dim. Considero la funzione ausiliaria

$$\varphi(x) = [f(b)-f(a)]\,g(x) - [g(b)-g(a)]\,f(x)$$

Proprietà di $\varphi(x)$:
(i) continua su $[a,b]$
(ii) derivabile in (a,b)
] comb. lin. di $f(x)$ e $g(x)$
(iii) $\varphi(a) = \varphi(b)$ (basta sostituire e fare il conto)
Allora per Rolle esiste almeno un $c \in (a,b)$ t.c.

$$\varphi'(c) = 0$$

$$\varphi'(x) = [f(b) - f(a)]\,g'(x) - [g(b) - g(a)]\,f'(x)$$

Il fatto che $\varphi'(c) = 0$ è equivalente alla prima tesi.

Per la 2a tesi devo dimostrare solo che $g(b) \neq g(a)$.
Supponiamo per assurdo che sia $g(b) = g(a)$. Allora posso applicare Rolle a $g(x)$ e ottenere un pto $c \in (a,b)$ t.c. $g'(c) = 0$, il che è contro l'ipotesi (iii).

— o — o —

Teorema di Lagrange Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$.
Supponiamo che
(i) f continua in $[a,b]$
(ii) f derivabile in (a,b).
Allora

$$\boxed{\exists\, c \in (a,b) \text{ t.c. } f(b) - f(a) = f'(c)\,(b-a)}$$

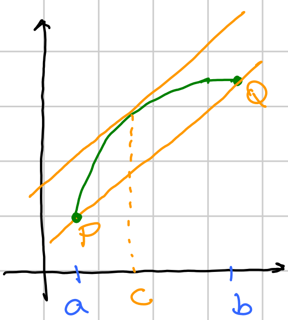
Dim 1 La tesi è equivalente a

$$\boxed{\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{f'(c)}{1}}$$

E questo segue da Cauchy con $g(x) = x$ (che ha $g'(c) = 1$) per la quale vale la 2a tesi di Cauchy.

— o — o —

Interpretazione geometrica Nella formula della dim. si ha
→ LHS = coeff. ang. retta PQ
→ RHS = coeff. ang. tangente nel pto del grafico con. a c.



Quindi Lagrange dice che $\exists\, c \in (a,b)$ in cui la retta tangente è // retta PQ

$\boxed{\text{Dim. 2}}$ Considero

$$\varphi(x) = f(x) - \text{retta } PQ$$

Si ha che $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$, quindi posso applicare Rolle a $\varphi(x)$, ottenendo che esiste $c \in (a,b)$ t.c. $\varphi'(c) = 0$, cioè

$$\begin{aligned} f'(c) &= \text{derivata della retta } PQ \\ &= \text{coeff. angolare retta } PQ \\ &= \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \end{aligned}$$

— o — o —

Oss. La dim. 2 non è altro che la dimostrazione di Cauchy nel caso $g(x) = x$.

Oss. Da Lagrange a Cauchy

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$$
$$g(b) - g(a) = g'(c)(b-a)$$

Divido e... NON VA BENE, perché il c sopra e sotto potrebbero non essere lo stesso.

— o — o —

ANALISI 1 — LEZIONE 099

Titolo nota 24/03/2015

Teoremi di De L'Hôpital   Casi $\frac{0}{0}$ e $\frac{\infty}{\infty}$.

Teorema (Caso $\frac{0}{0}$ limite $x \to x_0^+$)

Sia $x_0 \in \mathbb{R}$ e sia $r > 0$. Siano

$$f : (x_0, x_0+r) \to \mathbb{R} \qquad g : (x_0, x_0+r) \to \mathbb{R}$$

due funzioni

(i) continue in (x_0, x_0+r) e derivabili in (x_0, x_0+r)

(ii) supponiamo che $g'(x) \neq 0$ in (x_0, x_0+r)

(iii) supponiamo che

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} g(x) = 0$$

Allora $g(x) \neq 0$ per $x \in (x_0, x_0+r)$ e

$$\boxed{\liminf_{x \to x_0^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} \leq \liminf_{x \to x_0^+} \frac{f(x)}{g(x)} \leq \limsup_{x \to x_0^+} \frac{f(x)}{g(x)} \leq \limsup_{x \to x_0^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}}$$

In particolare, se esiste $\lim_{x \to x_0^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, allora sono tutte uguaglianze

$\boxed{\text{Dim. che } g(x) \neq 0 \text{ in } (x_0, x_0+r)}$

Supponiamo per assurdo che $\exists\, x_1 \in (x_0, x_0+r)$ t.c. $g(x_1) = 0$
Estendo $g(x)$ a tutto l'intervallo $[x_0, x_1]$ ponendo $g(x_0) = 0$.
Così facendo ottengo una funzione

$$\hat{g} : [x_0, x_1] \to \mathbb{R}$$

definita come

$$\hat{g}(x) = \begin{cases} g(x) & \text{se } x \in (x_0, x_1] \\ 0 & \text{se } x = x_0. \end{cases}$$

La funzione $\hat{g}$ è continua in $[x_0, x_1]$ per via dell'ipotesi che $\lim_{x \to x_0^+} g(x) = 0$. Inoltre $\hat{g}$ è derivabile in (x_0, x_1) e soddisfa $\hat{g}(x_0) = \hat{g}(x_1) = 0$.

Per Rolle esiste $c \in (x_0, x_1)$ t.c. $\hat{g}'(c) = g'(c) = 0$ il che è contro una delle ipotesi.

— o — o —

$\boxed{\text{Dim H1}}$ Basta dim. la disug. di dx

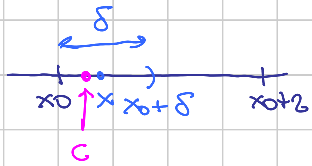
Basta dimostrarla nel caso in cui $\limsup_{x \to x_0^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \in \mathbb{R}$

(il caso $L = +\infty$ è ovvio, il caso $L = -\infty$ ricicla quello $L \in \mathbb{R}$).

Basta dimostrare che, per ogni $\varepsilon > 0$, si ha

$$\limsup_{x \to x_0^+} \frac{f(x)}{g(x)} \leq L + \varepsilon$$

Dunque fisso $\varepsilon > 0$. Per la caratterizzazione del limsup esiste $\delta > 0$ t.c.



$$\frac{f'(x)}{g'(x)} \leq L + \varepsilon \qquad \forall x \in (x_0, x_0 + \delta)$$

Considero le estensioni $\hat{f}$ e $\hat{g}$ definite come sopra ponendo $\hat{f}(x_0) = \hat{g}(x_0) = 0$ e ho che

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\hat{f}(x)}{\hat{g}(x)} = \frac{\hat{f}(x) - \hat{f}(x_0)}{\hat{g}(x) - \hat{g}(x_0)} \underset{\text{Cauchy}}{=} \frac{f'(c)}{g'(c)} \leq L + \varepsilon$$

per ogni $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ (anche c finisce nella stessa zona).

Passando al limsup ottengo

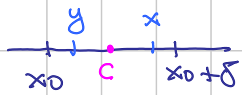
$$\limsup_{x \to x_0^+} \frac{f(x)}{g(x)} \leq L + \varepsilon$$

— o — o —

Oss. Se $L = -\infty$, si fa lo stesso ragionamento dimostrando che

$$\limsup_{x \to x_0^+} \frac{f(x)}{g(x)} \leq M \qquad \forall M \in \mathbb{R}$$

Dim H2 Senza estendere. Tutto uguale fino alla definizione di δ.



Comunque io prenda $x_0 < y < x < x_0 + \delta$ si avrà

$$\frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} \underset{\uparrow}{=} \frac{f'(c)}{g'(c)} \leq L + \varepsilon$$

Cauchy su $[x, y]$

Fisso x e faccio tendere $y \to x_0^+$. Ottengo

$$\frac{f(x)}{g(x)} \leq L + \varepsilon \qquad f(y) \to 0 \quad g(y) \to 0$$

Ora concludo facendo il limsup per $x \to x_0^+$.

— o — o —

Teorema (Caso $\frac{\infty}{\infty}$ per $x \to x_0^+$).
Siano $f : (x_0, x_0 + 2) \to \mathbb{R}$ e $g : (x_0, x_0 + 2) \to \mathbb{R}$ continue e derivabili in $(x_0, x_0 + 2)$.
Supponiamo che $g'(x) \neq 0$ per $x \in (x_0, x_0 + 2)$.
Supponiamo

$$\boxed{\lim_{x \to x_0^+} f(x) = +\infty} \qquad \lim_{x \to x_0^+} g(x) = +\infty$$

se ne può fare a meno

Allora vale la solita catena a 4 disuguaglianze

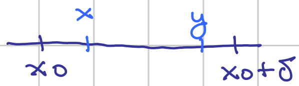
(È ovvio che posso dividere per $g(x)$ in quanto tendendo a $+\infty$ sarà $\neq 0$ in un intorno destro di x_0).

Brutal mode

$$\frac{f(x)}{g(x)} \underset{\uparrow}{\sim} \frac{f(x)-f(y)}{g(x)-g(y)} \sim \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

$f(x)$ e $g(x)$ sono grandi

$\boxed{\text{Dim H1}}$ Come prima dimostro solo la disug dx.
Come prima fisso $\varepsilon > 0$ e trovo $\delta > 0$ t.c.



$g(x) \neq 0$ per $x \in (x_0, x_0+\delta)$

$f(x) \neq 0$ per $x \in (x_0, x_0+\delta)$

$\dfrac{f'(x)}{g'(x)} \leq L+\varepsilon$ per $x \in (x_0, x_0+\delta)$

Ora per ogni $x \in (x_0, x_0+\delta)$ ho che $x_0 < x < y < x_0+\delta$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)-f(y)}{g(x)-g(y)} \cdot \frac{\dfrac{g(x)-g(y)}{g(x)}}{\dfrac{f(x)-f(y)}{f(x)}}$$

$$= \underbrace{\frac{f(x)-f(y)}{g(x)-g(y)}}_{\substack{\shortparallel \\ \frac{f'(c)}{g'(c)} \leq L+\varepsilon}} \cdot \frac{1-\dfrac{g(y)}{g(x)}}{1-\dfrac{f(y)}{f(x)}}$$

$$\leq (L+\varepsilon)\, \frac{1-\boxed{\dfrac{g(y)}{g(x)}} \to 0}{1-\boxed{\dfrac{f(y)}{f(x)}} \to 0}$$

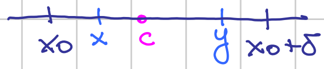
Lascio fisso y e faccio $x \to x_0^+$ e quindi

$$\limsup_{x \to x_0^+} \frac{f(x)}{g(x)} \leq L+\varepsilon.$$

Oss. Ho usato che $f(x) \to +\infty$ e $g(x) \to +\infty$

Potevo usare anche $y = x_0 + \delta$.

$\boxed{\text{Dim H2}}$ Come prima fino a δ



Per ogni $x_0 < x < y < x_0+\delta$ si ha

$$\frac{f(x)-f(y)}{g(x)-g(y)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \leq L+\varepsilon$$

Per x vicino a x_0 (anzi per ogni x) il denominatore è >0 quindi

$$f(x)-f(y) \leq (L+\varepsilon)(g(x)-g(y))$$

Ma allora

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)-f(y)+f(y)}{g(x)} \leq \frac{(L+\varepsilon)(g(x)-g(y))+f(y)}{g(x)}$$

$$= (L+\varepsilon)\left(1-\frac{g(y)}{g(x)}\right)+\frac{f(y)}{g(x)}$$

Facendo il limsup per $x \to x_0^+$ al RHS viene $L+\varepsilon$.

— o — o —

Oss. Nella seconda dimostrazione ho usato solo che $g(x) \to +\infty$ ma non ho usato che $f(x) \to +\infty$.

ANALISI 1 — LEZIONE 100

Titolo nota 24/03/2015

CESARO-STOLZ, ovvero HÔPITAL per successioni

Sotto certe ipotesi $$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}$$

Cesàro - Stolz 1 (Equivalente di Hôpital $\frac{0}{0}$)

Siano a_n e b_n due successioni t.c.

(i) $a_n \to 0$ e $b_n \to 0$

(ii) b_n monotona strettamente decrescente (in particolare $b_n > 0$)

Allora

$$\boxed{\liminf \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} \leq \liminf \frac{a_n}{b_n} \leq \limsup \frac{a_n}{b_n} \leq \limsup \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}}$$

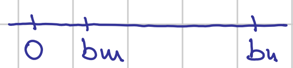
Dim Dimostro solo la parte destra supponendo il $\limsup = L \in \mathbb{R}$.
Fisso $\varepsilon > 0$. Per la caratterizzazione esiste $n_0 \in \mathbb{N}$ t.c.

$$\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} \leq L+\varepsilon \qquad \forall n \geq n_0$$

Occhio: il denominatore è negativo, quindi giro tutto:

$$\frac{a_n - a_{n+1}}{b_n - b_{n+1}} \leq L+\varepsilon$$ e ora posso moltiplicare ottenendo

$$a_n - a_{n+1} \leq (L+\varepsilon)(b_n - b_{n+1}) \qquad \forall n \geq n_0$$



Per ogni $m > n \geq n_0$ abbiamo che

$$a_n - a_m = \sum_{k=n}^{m-1} (a_k - a_{k+1}) \leq (L+\varepsilon) \sum_{k=n}^{m-1} (b_k - b_{k+1}) = (L+\varepsilon)(b_n - b_m)$$

e di conseguenza

$$\frac{a_n - a_m}{b_n - b_m} \leq L + \varepsilon$$

Passando al limite per $m \to +\infty$ otteniamo

$$\frac{a_n}{b_n} \leq L + \varepsilon \qquad \forall n \geq n_0$$

da cui passando al limsup

$$\limsup_{n \to +\infty} \frac{a_n}{b_n} \leq L + \varepsilon.$$

—o —o —

Idea brutale $\quad \frac{a_n}{b_n} \sim \frac{a_n - a_m}{b_n - b_m} \sim L + \varepsilon$

ragionevole se m è grande

—o —o —

$\boxed{\text{Cesàro – Stolz 2}}$ (Caso analogo a Hôp $\frac{\infty}{\infty}$)

Siano a_n e b_n due successioni tali che

(i) $a_n \to +\infty$ e $b_n \to +\infty$

(ii) b_n strettamente crescente.

Allora vale la solita catena a 4

$\boxed{\text{Dim.}}$ Facciamo sempre la solita disug. dx. Fissiamo $\varepsilon > 0$ e otteniamo $n_0 \in \mathbb{N}$ t.c.

$$\frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} \leq L + \varepsilon \qquad \forall n \geq n_0$$

Ora il denom è positivo, quindi posso moltiplicare:

$$a_{n+1} - a_n \leq (L+\varepsilon)(b_{n+1} - b_n) \qquad \forall n \geq n_0$$

Ora fisso $n > m \geq n_0$ e ho

$$a_n - a_m = \sum_{k=m}^{n-1} (a_{k+1} - a_k) \leq (L+\varepsilon) \sum_{k=m}^{n-1} (b_{k+1} - b_k) = (L+\varepsilon)(b_n - b_m)$$

da cui

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{a_n - a_m + a_m}{b_n} \leq \frac{(L+\varepsilon)(b_n - b_m) + a_m}{b_n}$$

Tengo m fisso e faccio tendere $n \to +\infty$. Il RHS $\to L+\varepsilon$ e quindi

$$\limsup_{n \to +\infty} \frac{a_n}{b_n} \leq L + \varepsilon.$$

— o — o —

Teorema delle medie di Cesàro Sia a_n una successione. Introduco le sue medie

$$M_n = \frac{a_1 + \ldots + a_n}{n}$$ (media dei primi n- termini)

Allora

$$\boxed{\liminf a_n \leq \liminf M_n \leq \limsup M_n \leq \limsup a_n}$$

Dim 1 Si può fare direttamente usando gli ε e gli n_0 (esercizio valido)

Dim 2 Pongo $S_n := a_1 + \ldots + a_n$, pongo $D_n = n$ e uso Stolz-Cesàro

$M_n = \dfrac{S_n}{D_n}$ ma liminf / sup di questo sono collegati

$$\frac{S_{n+1} - S_n}{D_{n+1} - D_n} = \frac{a_{n+1}}{1}$$ da cui si conclude.

— o — o —

Corollario 2 (rapporto → radice)
Devo fare il limite di $\sqrt[n]{a_n}$. Passando all'esponenziale mi riduco a fare il limite di

$$\frac{\log(a_n)}{n}$$

Facendo Cesàro – Stolz ritrovo

$$\frac{\log(a_{n+1}) - \log a_n}{(n+1) - n} = \log \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

da cui si chiude.

— o — o —

Esempio $\begin{cases} x_{n+1} = \arctan x_n \\ x_0 = 2015 \end{cases}$. Abbiamo dim che $x_n \to 0$, voglio sapere come

Supponiamo di aver congetturato che $x_n \sim \dfrac{c}{\sqrt{n}}$. Voglio trovare c. Devo fare il limite di $\sqrt{n}\, x_n$.
Faccio invece il limite di $n x_n^2$:

$$\lim n x_n^2 = \lim \frac{n}{\frac{1}{x_n^2}} \underset{\text{C.S.}}{=} \lim \frac{(n+1) - n}{\frac{1}{x_{n+1}^2} - \frac{1}{x_n^2}} =$$

$$= \lim \frac{1}{\frac{1}{\arctan^2 x_n} - \frac{1}{x_n^2}} = \lim_{x \to 0} \frac{x^2 \arctan^2 x}{x^2 - \arctan^2 x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{x^4 + o(x^4)}{x^2 - x^2 + \frac{2}{3}x^4 + o(x^4)} \to \frac{3}{2} = c^2$$

Stessa cosa in brutal mode: $x_n = \frac{c}{n^a}$

Impongo $x_{n+1} = \arctan x_n$

$$\frac{c}{(n+1)^a} = \arctan \frac{c}{n^a} = \frac{c}{n^a} - \frac{1}{3}\frac{c^3}{n^{3a}}$$

Moltiplico per n^a: $\frac{c\,n^a}{(n+1)^a} = c - \frac{1}{3}\frac{c^3}{n^{2a}}$

$$\frac{c\,n^a}{(n+1)^a} = c\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-a} = c - \frac{1}{3}\frac{c^3}{n^{2a}}$$

$$\cancel{c} - \frac{ca}{n} = \cancel{c} - \frac{1}{3}\frac{c^3}{n^{2a}} \rightsquigarrow$$

$2a = 1 \rightsquigarrow a = \frac{1}{2}$

$c^3 = 3ac$

$c^2 = \frac{3}{2}$

Esempio $\begin{cases} x_{n+1} = x_n^2 - 8x_n + 7 \\ x_0 = 2015 \end{cases}$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\log(\log(x_n))}{n} = \lim_{n\to+\infty} \log(\log(x_{n+1})) - \log\log x_n$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \log \frac{\log x_{n+1}}{\log x_n}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \log \frac{\log(x_n^2 - 8x_n + 7)}{\log x_n}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \log \frac{\log(x^2-8x+7)}{\log x} = \log 2$$

In alternativa

$\frac{1}{n}\log(\log x_n) = \log\left[\sqrt[n]{\log x_n}\right]$. Quello dentro lo faccio con rapporto $\to$ radice riducendomi a

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\log x_{n+1}}{\log x_n} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\log(x^2-8x+7)}{\log x} = 2$$

ANALISI 1 – LEZIONE 101

Titolo nota 25/03/2015

Formula di TAYLOR

resto di Peano

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \boxed{o(x^n)}$$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \boxed{\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} x^{n+1}}$$

c sta tra 0 e x

resto di Lagrange

Più in generale, con centro in x_0 generico,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k + o((x-x_0)^n)$$

$$+ \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x-x_0)^{n+1}$$

c sta tra x_0 e x

Oss. Basta dim. quelle con centro in $x_0 = 0$. Per le altre si considera la funzione $g(x) = f(x-x_0)$ (sposto l'origine in x_0).

Teorema (Taylor con resto di Peano) Sia $r > 0$ e sia

$$f: (-r, r) \to \mathbb{R}$$

Sia $n \in \mathbb{N}$ (ordine dello sviluppo)

Supponiamo che

(i) f sia derivabile $(n-1)$ volte in $(-r, r)$

(ii) f sia derivabile n volte in $x_0 = 0$

Allora esiste un unico polinomio $P_n(x)$ tale che

$$f(x) = P_n(x) + o(x^n) \quad \text{per } x \to 0$$

e $P_n(x)$ è dato dalla solita formula.

<u>Teorema</u> (Taylor con resto di Lagrange)
Siano r, f ed n come prima.
Supponiamo che
(i) f sia derivabile $(n+1)$ volte in $(-r,r)$
Allora esiste un unico polinomio $P_n(x)$ per cui vale il solito sviluppo, ed è dato dalla solita formula.

— o — o —

$\boxed{\text{Via classica alla dimostrazione}}$

<u>Lemma 1</u> Consideriamo un monomio $g(x) = a_k x^k$, con $a_k \neq 0$ e $k \in \mathbb{N}$.
Allora

$$g^{(i)}(0) = \begin{cases} 0 & \text{se } i \neq k \\ k!\,a_k & \text{se } i = k \end{cases}$$

$\boxed{\text{Dim}}$ Quasi ovvia... $g^{(i)}(x) = k(k-1)\cdot\ldots\cdot(k-i+1)\,x^{k-i}a_k$
se $i \leq k$ e $g^{i}(x) = 0$ se $i > k$.
Volendo posso riscrivere

$$g^{(i)}(x) = \begin{cases} \frac{k!}{(k-i)!}x^{k-i}a_k & \text{se } i \leq k \\ 0 & \text{se } i > k \end{cases}$$

induzione

Sostituendo $x=0$ si salva solo il caso $i=k$.

<u>Lemma 2</u> Consideriamo ora un polinomio

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

Allora

$$P^{(i)}(0) = \begin{cases} i!\,a_i & \text{se } i \leq n \\ 0 & \text{se } i > n \end{cases}$$

$\boxed{\text{Dim.}}$ Basta applicare l'enunciato precedente ai singoli monomi

$$p^{(i)}(x) = \sum_{k=0}^{n} [a_k x^k]^{(i)} = \sum_{k=0}^{n} \frac{k!}{(k-i)!} a_k x^{k-i}$$

Quando sostituisco $x=0$ resta solo il termine con $k=i$

Lemma 3 Sia $f(x)$ una funzione come nel teorema, e sia

$$\varphi(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$$

= funzione − polinomio di Taylor

Allora

$$\varphi^{(i)}(0) = 0 \qquad \text{per ogni } i = 0, 1, \dots, n$$

$\boxed{\text{Dim.}}$
$$\varphi^{(i)}(0) = f^{(i)}(0) - \left[\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \right]^{(i)}$$

$$= f^{(i)}(0) - \frac{f^{(i)}(0)}{\cancel{i!}} \cancel{i!} = 0$$

dal lemma precedente

$\boxed{\text{Oss.}}$ Abbiamo così dimostrato la proprietà fondamentale: le prime n derivate del polinomio di Taylor, calcolate in $x=0$, coincidono con le prime n derivate della $f(x)$

Lemma 4 (Peano decisivo) Sia $\varphi : (-1,1) \to \mathbb{R}$ una funzione tale che

(i) derivabile $(n-1)$ volte in $(-1,1)$

(ii) derivabile n volte in 0

(iii) $\varphi(0) = \varphi'(0) = \dots = \varphi^{(n)}(0) = 0$.

Allora

$$\varphi(x) = o(x^n) \qquad \text{per } x \to 0$$

Dim. Devo dimostrare che

$$\lim_{x\to 0} \frac{\varphi(x)}{x^n} = 0$$

Questo si dimostra con n colpi di Hôpital ... quasi ...

$$\lim_{x\to 0} \frac{\varphi(x)}{x^n} \underset{\frac{0}{0}}{\overset{\uparrow}{=}} \lim_{x\to 0} \frac{\varphi'(x)}{n x^{n-1}} \underset{\frac{0}{0}}{\overset{\uparrow}{=}} \ldots = \lim_{x\to 0} \frac{\varphi^{(n-1)}(x)}{n!\, x} = \frac{0}{0}$$

Se avessi che $\varphi^{(n)}$ esiste in tutto l'intervallo potrei concludere con Hôpital, ma sono stato tirchio con le ipotesi ... ☹
Per concludere uso la definizione di derivata in $x=0$ per la derivata $(n-1)$ esima

$$\lim_{x\to 0} \frac{\varphi^{(n-1)}(x)}{n!\, x} = \frac{1}{n!} \lim_{x\to 0} \frac{\varphi^{(n-1)}(x) - \overset{\overset{0}{\shortparallel}}{\varphi^{(n-1)}(0)}}{x}$$

$$= \varphi^{(n)}(0) = 0$$

Def. di derivata di $\varphi^{(n-1)}$ calcolata in $x_0 = 0$.

$\boxed{\text{Dim. Taylor-Peano}}$ Lemma 1+2+3+4

Lemma 5 (Lagrange decisivo) Sia $\varphi : (-1,1) \to \mathbb{R}$ una funzione tale che

(i) φ è derivabile $(n+1)$ volte in $(-1,1)$

(ii) $\varphi(0) = \varphi'(0) = \ldots = \varphi^{(n)}(0) = 0$

Allora per ogni $x \in (-1,1)$ esiste almeno un p.to c fra 0 e x tale che

$$\varphi(x) = \frac{\varphi^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} x^{n+1}$$

Dim.

$$\frac{\varphi(x)}{x^{n+1}} = \frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x^{n+1}-0^{n+1}} \underset{\uparrow \text{Cauchy}}{=}$$

deriv. num. →

deriv. denom. →

$$= \frac{\varphi'(c_1)}{(n+1)\,c_1^{\,n}} = \frac{\varphi'(c_1)-\varphi'(0)}{(n+1)\,[\,c_1^{\,n}-0^n\,]} \underset{\uparrow \text{Cauchy}}{=}$$

$$= \frac{\varphi''(c_2)}{(n+1)\,n\,c_2^{\,n-1}}$$

Proseguo allo stesso modo fino a quando alla fine resto con

$$\frac{\varphi^{(n)}(c_n)}{(n+1)!\,c_n} = \frac{\varphi^{(n)}(c_n)-\varphi^{(n)}(0)}{(n+1)!\,(c_n-0)} = \frac{\varphi^{(n+1)}(c_{n+1})}{(n+1)!}$$

e questo completa la dimostrazione di Taylor-Lagrange

— o — o —

Dim. alternativa di Taylor Lagrange (segnalata da francicko sul Forum)

$$f(a) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(a-x_0)^k = R_n$$

voglio dim. che $\quad R_n = \dfrac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(a-x_0)^{n+1}$

Considero la funzione

$$g(x) = f(a) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x)}{k!}(a-x)^k + (a-x)^{n+1}\frac{R_n}{(a-x_0)^{n+1}}$$

Allora $\quad g(a) = f(a) - f(a) = 0$

$\qquad\quad g(x_0) = R_n - R_n = 0$

Per Rolle esiste un pto c tra x_0 e a in cui $g'(c) = 0$

$$g'(x) = -\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k+1)}(x)}{k!}(a-x)^k + \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x)}{k!}\, k\,(a-x)^{k-1}$$

$$+ (n+1)(a-x)^n \frac{R_n}{(a-x_0)^{n+1}}$$

$$= -\sum_{k=1}^{n+1} \frac{f^{(k)}(x)}{(k-1)!}(a-x)^{k-1} + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(x)}{(k-1)!}(a-x)^{k-1}$$

$$+ (n+1)(a-x)^n \frac{R_n}{(a-x_0)^{n+1}}$$

$$= -\frac{f^{(n+1)}(x)}{(n)!}(a-x)^n + (n+1)(a-x)^n \frac{R_n}{(a-x_0)^{n+1}}$$

Se impongo che per $x = c$ si annulli ottengo

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(a-x_0)^{n+1}$$

— o — o —

ANALISI 1 — LEZIONE 102

Titolo nota 25/03/2015

$$\boxed{\text{Assiomi di } \mathbb{R}} \longrightarrow \boxed{\text{Weierstrass}}$$

$\boxed{\text{Teorema di Bolzano – Weierstrass}}$

Sia a_n succ. di numeri reali.
Supponiamo che a_n sia limitata ($\exists\, M \in \mathbb{R}$ t.c. $|a_n| \le M \ \forall n \in \mathbb{N}$)
Allora esiste una sottosuccessione che ha limite reale, cioè esiste una successione n_k strettamente crescente di numeri naturali ed esiste $a_\infty \in \mathbb{R}$ tale che

$$a_{n_k} \longrightarrow a_\infty$$

$\boxed{\text{Dim.}}$ Essendo la successione limitata si avrà che

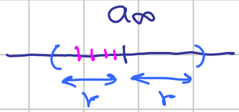
$$\limsup_{n \to +\infty} a_n = L \in \mathbb{R}$$

Per la caratterizzazione del limsup, sappiamo che esiste una s.succ. che converge ad L.
[Potevo fare la stessa cosa con il liminf].

<u>Corollario</u> Sia $D \subseteq \mathbb{R}$ un sottoinsieme limitato e chiuso.
Sia a_n una succ. contenuta in D, cioè $a_n \in D$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.
Allora esiste una sottosuccessione che converge ad un elemento di D.
Anzi, ogni sottosuccessione che converge lo fa ad un elemento di D.

<u>Dim.</u> Essendo D limitato, a_n ammette almeno una s.succ. convergente

$$a_{n_k} \longrightarrow a_\infty \in \mathbb{R}$$



Voglio dim. che $a_\infty \in D$.
Per definizione di limite, per ogni $r>0$ trovo elementi della successione in $(a_\infty - r, a_\infty + r)$, quindi trovo elementi di D in $(a_\infty - r, a_\infty + r)$.
Ma allora $a_\infty \in \mathrm{Clos}(D)$, ma essendo D chiuso $a_\infty \in D$.

<u>Def.</u> Un sottoinsieme $D \subseteq \mathbb{R}$ si dice COMPATTO se e solo se è limitato + chiuso.

<u>Ri-enunciato</u> Se $D \subseteq \mathbb{R}$ è compatto e a_n è una succ. a valori in D, allora per forza a_n ammette una s.succ. convergente ad un elemento di D.

Teorema di Weierstrass Sia $D \subseteq \mathbb{R}$ e sia $f: D \to \mathbb{R}$.
Supponiamo che
(i) D è compatto
(ii) f è continua
Allora esistono per forza

$$\min\{f(x) : x \in D\}$$
$$\max\{f(x) : x \in D\}$$

$\boxed{\text{Dim.}}$ La faccio solo per il minimo (per il max è uguale).
Considero l'immagine

$$\{f(x) : x \in D\}$$

Sicuramente esiste

$$I = \inf\{f(x) : x \in D\} \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$$

Per un lemma fatto a suo tempo esiste una successione di p.ti y_n nell'immagine tale che $y_n \to I$.
Per definizione di immagine esistono $x_n \in D$ t.c. $f(x_n) = y_n$.
Ora poiché D è compatto esiste una s.succ. convergente

$$x_{n_k} \longrightarrow x_\infty \quad (\text{no candidato pto di minimo})$$

Voglio dimostrare che $f(x_\infty) = I$. D'altra parte per la continuità di $f(x)$ si avrà che

$$f(x_\infty) \underset{\uparrow\ \text{continuità}}{=} \lim_{k\to+\infty} f(x_{n_k}) \underset{\uparrow\ \text{defn. di } x_{n_k}}{=} \lim_{k\to+\infty} y_{n_k} \underset{\uparrow\ \text{s.succ. di } y_n}{=} I$$

solo ora si esclude che I possa essere $-\infty$

— o — o —

<u>Oss.</u> Gli y_n, il pto I, ed il minimo stanno sull'asse y.
Gli x_n stanno sull'asse x, ed in particolare in D.

<u>Oss.</u> Gli x_n si chiamano "successione minimizzante" perché $f(x_n) \longrightarrow I = \inf$

— o — o —

<u>Dimostrazione di B-W senza usare il limsup.</u>

Per ipotesi abbiamo una succ. a_n con

$$-M \leq a_n \leq M$$

Pongo

$$a_\infty := \sup\{x \in [-M, M] : a_n \geq x \text{ per infiniti indici}\}$$

Siamo sicuri che sto facendo il sup di un insieme $\neq \emptyset$ (contiene $x = -M$) e limitato superiormente (non contiene elementi $> M$).
Quindi $a_\infty \in \mathbb{R}$. Dico che esiste una s.succ. che converge ad a_∞:

$$a_{n_k} \longrightarrow a_\infty$$

Fatto fondamentale Per ogni $\varepsilon > 0$ esistono infiniti indici n per cui

$$a_\infty - \varepsilon \le a_n \le a_\infty + \varepsilon.$$

Perché? Gli indici per cui $a_n > a_\infty + \varepsilon$ sono un numero finito, gli indici per cui $a_n \ge a_\infty - \varepsilon$ sono infiniti (altrimenti a_∞ sarebbe più piccolo)

Costruisco ora la s.succ. $a_{n_k} \to a_\infty$ con questo algoritmo

→ scelgo a_{n_0} a caso

→ supponendo di aver scelto $a_{n_0}, a_{n_1}, \ldots, a_{n_k}$ uso il fatto fondamentale con $\varepsilon = \frac{1}{k+1}$ ↖ basta che vada a 0

e scelgo un indice $n_{k+1} > n_k$ in maniera tale che

$$a_\infty - \frac{1}{k+1} \le a_{n_{k+1}} \le a_\infty + \frac{1}{k+1}$$

(posso perché ho infiniti indici a disposizione).

Per i carabinieri $a_{n_k} \to a_\infty$.

— o — o —

Analogamente funzionava con

$$b_\infty := \inf \{ x \in [-M, M] : a_n \le x \text{ per infiniti } n \}$$

Oss. a_∞ è proprio il limsup
b_∞ è proprio il liminf

ANALISI 1 – LEZIONE 103

Titolo nota 27/03/2015

SUCCESSIONI DI CAUCHY E COMPLETEZZA

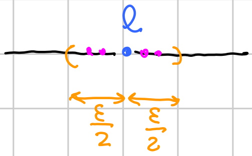
Def. Una succ. a_n di numeri reali si dice succ. di CAUCHY se

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad t.c. \quad |a_n - a_m| < \varepsilon \qquad \forall n \geq n_0, \forall m \geq n_0}$$

Brutalmente: definitivamente gli a_n stanno "vicini-vicini"

Prop. 1 Sia a_n una succ. che ha limite reale, cioè $a_n \to l \in \mathbb{R}$. Allora a_n è una succ. di Cauchy

Idea della dim.: essendo gli a_n vicini al limite, saranno anche vicini tra di loro



Dim. Uso la def. di limite con $\frac{\varepsilon}{2}$.
Per ogni $\varepsilon > 0$ $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ t.c.

$$|a_n - l| \leq \frac{\varepsilon}{2} \qquad \forall n \geq n_0.$$

Allora lo stesso n_0 va bene nella def. di succ. di Cauchy. Infatti

$$\forall n \geq n_0, \forall m \geq n_0: \quad |a_m - a_n| = |a_n - l + l - a_m| \leq |a_n - l| + |a_m - l| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Prop. 2 Sia a_n una succ. di Cauchy. Allora a_n è limitata.

Dim.: Uso la def. di succ. di Cauchy con $\varepsilon = 1$
↑ basta un qualunque numero

$\exists\, n_0$ t.c. $\quad |a_n - a_m| \le 1 \quad \forall n \ge n_0 \quad \forall m \ge n_0$

In particolare, prendendo $m = n_0$, si ottiene

$$|a_n - a_{n_0}| \le 1$$

cioè $\quad a_{n_0} - 1 \le a_n \le a_{n_0} + 1 \quad \forall n \ge n_0$

I termini precedenti sono un numero finito. Detto altrimenti

$$a_n \le \max\{a_{n_0}+1, a_0, a_1, \dots, a_{n_0-1}\} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$
$$a_n \ge \min\{a_{n_0}-1, a_0, a_1, \dots, a_{n_0-1}\} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

— o — o —

$\boxed{\text{Prop. 3}}$ Sia a_n una succ. di Cauchy.
Supponiamo che esista una s.succ. convergente, diciamo

$$a_{n_k} \longrightarrow a_\infty$$

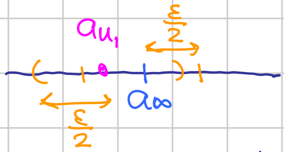
Allora tutta la successione tende a a_∞, cioè $a_n \to a_\infty$

Idea: gli a_{n_k} stanno vicini ad a_∞ e si tirano dietro tutti gli altri.

Dim. Uso la defin. di succ. di Cauchy con $\frac{\varepsilon}{2}$. Ottengo un $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che

$$|a_n - a_m| \le \frac{\varepsilon}{2} \qquad \forall n \ge n_0,\ \forall m \ge n_0$$

Considero l'intervallo $\left[a_\infty - \frac{\varepsilon}{2}, a_\infty + \frac{\varepsilon}{2}\right]$.



Poiché $a_{n_k} \to a_\infty$, esistono infiniti indici n per cui $a_n \in$ intervallo (quelli della s.succ. definitivamente)
In particolare esiste un indice $n_1 \ge n_0$ t.c.

$$|a_\infty - a_{n_1}| \le \frac{\varepsilon}{2}$$

Prendendo $m = n_1$ nella def. di Cauchy otteniamo

$$|a_n - a_{n_1}| \le \frac{\varepsilon}{2} \qquad \forall n \ge n_1 \quad \text{(qui basterebbe } n_0\text{)}$$

In conclusione, per ogni $n \geq n_1$ si ha che

$$\begin{aligned} |a_n - a_\infty| &= |a_n - a_{n_1} + a_{n_1} - a_\infty| \\ &\leq |a_n - a_{n_1}| + |a_{n_1} - a_\infty| \\ &\leq \underbrace{\frac{\varepsilon}{2}}_{\text{def. di Cauchy}} + \underbrace{\frac{\varepsilon}{2}}_{\text{scelta di } n_1} \end{aligned}$$

— o — o —

<u>Teorema</u> (Completezza dei numeri reali)
Sia a_n una succ. di Cauchy.
Allora per forza a_n ha limite reale, cioè $a_n \to a_\infty \in \mathbb{R}$.

$\boxed{\text{Dim 1}}$ Sono tre passi
① Per la prop. 2 la successione è limitata
② Per B-W. ammette una s.succ. convergente
③ Per la prop. 3 tutta la succ. converge allo stesso limite.

$\boxed{\text{Dim. 2}}$ Per la proposizione 2 è limitata, quindi

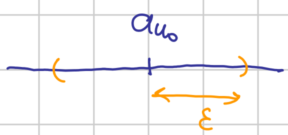
$$\ell := \liminf a_n \in \mathbb{R} \qquad L := \limsup a_n \in \mathbb{R}$$

Mi basta dimostrare che $\ell = L$. Dimostrerò che per ogni $\varepsilon > 0$ si ha che $L - \ell \leq 2\varepsilon$ e questo basta.
Fisso $\varepsilon > 0$. Uso la def. di succ. di Cauchy e ottengo $n_0 \in \mathbb{N}$ t.c.

$$|a_n - a_m| \leq \varepsilon \qquad \forall n \geq n_0 \quad \forall m \geq n_0$$

Scelgo $m = n_0$ e ottengo che

$$|a_n - a_{n_0}| \leq \varepsilon \qquad \forall n \geq n_0$$



cioè

$$a_{n_0} - \varepsilon \leq a_n \leq a_{n_0} + \varepsilon \qquad \forall n \geq n_0$$

Ma allora per confronto si avrà

$$a_{n_0} - \varepsilon \leq \ell \leq L \leq a_{n_0} + \varepsilon$$

da cui $L - \ell \leq 2\varepsilon$. □

Assoluta convergenza per serie

$$\sum_{n\geq 0}^{\infty} |a_n| < +\infty \implies \sum_{n\geq 0}^{\infty} a_n \text{ converge}$$

$\boxed{\text{Dim 1}}$ $-|a_n| \leq a_n \leq |a_n|$ + carabinieri per serie (vedi Vol. 1)
↑via ordinamento

$\boxed{\text{Dim. 2}}$ Introduco le somme parziali
↑via completezza

$$S_n := a_0 + a_1 + \dots + a_n \qquad \hat{S}_n := |a_0| + |a_1| + \dots + |a_n|$$

Allora per ogni $m > n$ si ha che

$$\begin{aligned} |S_m - S_n| &= |a_{n+1} + \dots + a_m| \\ &\leq |a_{n+1}| + \dots + |a_m| \\ &= \hat{S}_m - \hat{S}_n \end{aligned}$$

Se $\hat{S}_n$ è di Cauchy, allora per forza S_n è di Cauchy

Catena logica:

→ se $\sum |a_n|$ converge, allora $\hat{S}_n$ è una succ. di Cauchy

→ se $\hat{S}_n$ è di Cauchy, allora per ogni $\varepsilon > 0$ si ha $\exists n_0 \in \mathbb{N}$: $\hat{S}_m - \hat{S}_n \leq \varepsilon \quad \forall m > n \geq n_0$

→ per la disuguaglianza di sopra, lo stesso vale per S_n, che quindi è di Cauchy

→ se S_n è di Cauchy, per il teorema ha limite, quindi $\sum a_n$ converge

— o — o —

Abbiamo visto:

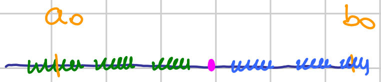
Assioma di continuità ⇝ Completezza dei numeri reali

MA VALE ANCHE IL VICEVERSA

cioè si può dimostrare l'assioma di continuità assumendo la completezza + la proprietà Archimedea ($\forall r \in \mathbb{R}\ \exists n \in \mathbb{N}$ t.c. $n \geq r$)

$\boxed{\text{Dim.}}$ Ipotesi: vale la completezza + Archimedea

Tesi: per ogni A e B con A a sx di B esiste un c che sta in mezzo



Algoritmo:

→ Scelgo $a_0 \in A$ e $b_0 \in B$

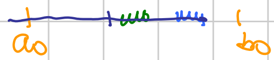
Guardo il p.to medio $\frac{a_0+b_0}{2}$.

Se è un separatore ho vinto.

Se non lo è, ci sono due casi che si escludono a vicenda

- ci sono elementi di A maggiori

  Pongo $a_1 = \frac{a_0+b_0}{2}$ $\quad b_1 = b_0$



- ci sono elementi di B minori

  Pongo

  $a_1 = a_0$ e $b_1 = \frac{a_0+b_0}{2}$

Procedendo in questo modo trovo due successioni a_k e b_k t.c.

$$\left.\begin{array}{lll} b \geq a_k & \forall k \in \mathbb{N} & \forall b \in B \\ a \leq b_k & \forall k \in \mathbb{N} & \forall a \in A \end{array}\right] \star$$

per la Archimedea

Si verifica (esercizio) che a_k e b_k sono di Cauchy, quindi convergono a qualcosa che è lo stesso nei 2 casi ed è il c che sto cercando.

Passando al limite le $\star$ per $k \to +\infty$ si vede che il limite è il separatore richiesto.

— o — o —

Aggiunto dopo video: l'ultimo teo. richiede come ipotesi la proprietà Archimedea.

ANALISI 1 — LEZIONE 104

Titolo nota 27/03/2015

Le quattro facce della continuità

Sia $D \subseteq \mathbb{R}$, sia $f: D \to \mathbb{R}$, sia $x_0 \in D$.

$\boxed{\text{Cosa vuol dire che } f \text{ è continua in } x_0 \text{ ?}}$

1 – Limite
2 – ε / δ
3 – Successioni
4 – "Topologica"

Def. 1 (Prima parte del corso) f è continua in x_0 se
- $x_0 \in \text{Isd}(D)$
- $x_0 \in D(D)$ e $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

Def. 2 (ε / δ)

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \text{t.c.} \quad |f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon \quad \forall x \in \underbrace{[x_0 - \delta, x_0 + \delta] \cap D}_{\text{Non tolgo } x_0}$$

Oss. L'equivalenza tra Def. 1 e Def. 2 è un esercizio (occhio ai p.ti isolati e a $x = x_0$)

Def. 3 Si dice che f è continua per successioni in x_0 se per ogni successione $x_n \to x_0$ con $x_n \in D$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha

$$f(x_n) \to f(x_0)$$

Per la definizione topologica occorre aprire una parentesi.
Siano $A \subseteq D \subseteq \mathbb{R}$ e sia $x_0 \in A$. Dico che x_0 è interno ad A nell'ambiente D, cioè limitandomi a D, se

$$\boxed{\exists r > 0 \quad (x_0 - r, x_0 + r) \cap D \subseteq A}$$

Esempio discriminante $D = [0, +\infty)$ $A = [0, 1]$ $x_0 = 0$

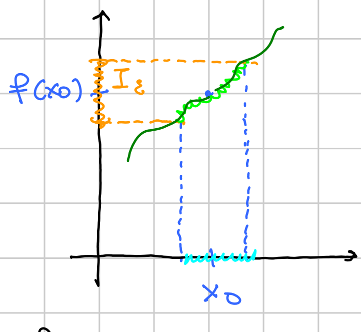
È chiaro che x_0 NON è interno ad A.
Tuttavia x_0 è interno ad A relativamente all'ambiente D

Se guardo tutto relativamente a D, allora è come se buttassi via tutte le x negative.

Def. 1 Si dice che f è continua in x_0 se

$\forall \varepsilon > 0$ posto $I_\varepsilon = (f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon)$ si ha che

x_0 è interno a $f^{-1}(I_\varepsilon)$ relativamente a D.
↑
è equivalente a richiedere che
$\exists \delta > 0$ t.c. $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap D \subseteq f^{-1}(I_\varepsilon)$



— o — o —

Che cosa vuol dire che f è continua in D? Che è continua in ogni pto ...

$\boxed{\text{Def. 2}}$ (ε / δ) $\forall x_0 \in D$ $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ t.c.

$$|f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon \quad \forall x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \cap D$$

$\boxed{\text{Def. 3}}$ (Successioni) $\forall x_0 \in D \quad \forall x_n \to x_0$ contenuta in D

$$f(x_n) \to f(x_0)$$

$\boxed{\text{Def. 4}}$ (Topologica) $\forall A \subseteq \mathbb{R}$ aperto si ha che

$$\boxed{f^{-1}(A) \text{ è aperto relativamente a } D}$$

Equivalenza tra continuità ε/δ e continuità per successioni

$\boxed{\text{Dim} \Longrightarrow}$ Ipotesi: f continua ε/δ in x_0

Tesi: se $x_n \to x_0$, allora $f(x_n) \to f(x_0)$

Fisso $\varepsilon > 0$ e voglio dim. che $|f(x_n) - f(x_0)| \leq \varepsilon$ definitiv.

Uso l'ipotesi e ottengo $\delta > 0$ t.c.

$$|f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon \qquad \forall x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \cap D$$

Poiché $x_n \to x_0$, definitivamente $x_n \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \cap D$. $\square$

$\boxed{\text{Dim} \Longleftarrow}$ Ipotesi: se $D \ni x_n \to x_0$ allora $f(x_n) \to f(x_0)$

Tesi: continuità ε/δ

Per assurdo, quindi bisogna negare la tesi

Tesi: $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \cap D \quad |f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon$

NOT TESI: $\exists \varepsilon_0 > 0 \ \forall \delta > 0 \ \exists x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \cap D \ |f(x) - f(x_0)| > \varepsilon_0$

Uso la NOT TESI con $\delta = \boxed{\frac{1}{k}}$. Trovo un p.to x_k t.c.

basta che $\to 0$

$$x_0 - \frac{1}{k} \leq x_k \leq x_0 + \frac{1}{k} \qquad \text{e} \qquad |f(x_k) - f(x_0)| > \varepsilon_0$$

Ora passando al limite otteniamo $x_k \to x_0$ per i carabinieri e $f(x_k) \to f(x_0)$ per ipotesi. Ma allora $|0-0| \geq \varepsilon_0$ e questo è assurdo.

— o — o —

<u>Composizione di funzioni continue</u> Siano $A \subseteq \mathbb{R}$, $B \subseteq \mathbb{R}$
Sia $f : A \to B$, e sia $g : B \to \mathbb{R}$, $x_0 \in A$.
(in questo modo è garantita la composizione $g(f(x)) : A \to \mathbb{R}$)
Supponiamo
(i) f continua in x_0
(ii) g continua in $f(x_0)$.
Allora

$$\boxed{g \circ f \text{ è continua in } x_0}$$

Dim. via continuità per successioni Prendo una qualunque succ. $x_n \to x_0$ e voglio dedurre che $g(f(x_n)) \to g(f(x_0))$.
Ma

$$\underset{A}{\underset{\cap}{x_n}} \to x_0 \underset{\substack{\text{continuità}\\ \text{di } f(x)\\ \text{in } x_0}}{\Longrightarrow} \underset{B}{\underset{\cap}{f(x_n)}} \to f(x_0) \underset{\substack{\text{continuità}\\ \text{di } g(x) \text{ in}\\ f(x_0)}}{\Longrightarrow} g(f(x_n)) \to g(f(x_0)).$$

— o — o —

Esercizio: Provare a fare la dimostrazione ε/δ, del tutto fattibile

Achtung! Occhio alla dimostrazione topologica. Dato $U \subseteq \mathbb{R}$ aperto si ha

$$g^{-1}(U) \text{ aperto} \quad \text{e quindi} \quad \underbrace{f^{-1}(g^{-1}(U)) = (g \circ f)^{-1}(U)}_{\text{aperto}}$$

Aperto infatti è sempre relativo all'insieme di definizione.

ANALISI 1 — LEZIONE 105

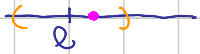
Titolo nota 31/03/2015

LE TRE FACCE DELLA COMPATTEZZA

Def. (già data) Un sottoinsieme $A \subseteq \mathbb{R}$ si dice compatto se è limitato + chiuso.

Prop. Se $A \subseteq \mathbb{R}$ è compatto e non vuoto, allora $\inf A \in \mathbb{R}$ e $\inf A \in A$, quindi A ammette minimo

Dim. $\inf A \in \mathbb{R}$ perché A è limitato (basterebbe limitato inferiormente).
Sia ora $\ell = \inf A$. Per la caratterizzazione
$\forall \varepsilon > 0 \ \exists a \in A$ t.c. $a \leq \ell + \varepsilon$, e in particolare
$\ell \leq a \leq \ell + \varepsilon$



Questo dice che $\ell \in \mathrm{Clos}(A) = A$
perché A è chiuso.

Oss. 1 Analogamente, $\sup A \in A$, quindi A ammette massimo.

Oss. 2 Non è detto che max / min di A siano p.ti di accumulaz.

Def. Un sottoinsieme $A \subseteq \mathbb{R}$ si dice compatto per successioni se ogni successione a valori in A ammette almeno una s. succ. convergente ad un elemento di A.
(se $a_n \in A$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, esiste $a_{n_k} \to a_\infty \in A$)

Teorema Un sottoinsieme $A \subseteq \mathbb{R}$ è compatto se e solo se è compatto per successioni.

$\boxed{\text{Dim.}}$ Compatto $\Rightarrow$ compatto per successioni: enunciato stesso di Bolzano – Weierstrass.

Compatto per successioni $\Rightarrow$ compatto

Devo dimostrare che è limitato e chiuso. Supponiamo per assurdo che non sia vero.

- Mettiamo che A non sia limitato, e mettiamo che sia $\sup A = +\infty$ (il caso $\inf A = -\infty$ è analogo).

  Allora per il solito lemma esiste

  $$A \ni a_n \longrightarrow +\infty$$

  Questa non può avere s.succ. convergenti ad elementi di A.

- Mettiamo che A non sia chiuso. Allora esiste almeno un pto $x_0 \in \mathbb{R}$ che sta in $\mathrm{Clos}(A)$, ma non in A. Allora esiste una successione

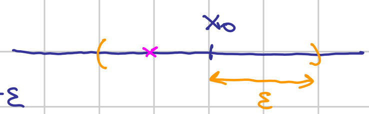
  $$A \ni a_n \longrightarrow x_0 \notin A$$

  È chiaro che tutte le s.succ. di a_n continuano a tendere a x_0 e quindi non convergono ad un elemento di A.

Lemma Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ un sottoinsieme, e sia $x_0 \in \mathrm{Clos}(A) \setminus A$ (quindi A non è chiuso). Allora esiste

$$A \ni a_n \longrightarrow x_0$$

$\boxed{\text{Dim.}}$ Poiché $x_0 \in \mathrm{Clos}(A)$ avremo che



$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists\, a \in A \text{ t.c. } x_0 - \varepsilon \le a \le x_0 + \varepsilon$$

La uso con $\varepsilon = \frac{1}{k}$ e trovo $a_k \in A$ t.c.

$$x_0 - \frac{1}{k} \le a_k \le x_0 + \frac{1}{k}$$

Per i carabinieri la successione $\underset{\substack{\cap \\ A}}{a_k} \longrightarrow \underset{\substack{\not\cap \\ A}}{x_0}$.

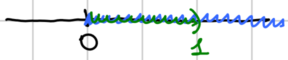
<u>Def.</u> (già data) Siano $U \subseteq A \subseteq \mathbb{R}$. Si dice che U è aperto in A se

$$\forall x_0 \in U \ \exists\, r > 0 \text{ t.c. } (x_0 - r, x_0 + r) \cap A \subseteq U$$

<u>Oss.</u> La definizione è equivalente a dire che ogni $x_0 \in U$ è interno ad U relativamente ad A

<u>Oss.</u> La definizione è equivalente a dire che esiste un aperto $B \subseteq \mathbb{R}$ tale che $U = B \cap A$
(detto brutalmente: gli aperti in A sono le intersezioni di A con gli aperti veri di $\mathbb{R}$)

<u>Esempio</u> $A = [0, +\infty)$, $U = [0, 1)$. Allora U è aperto in A.



È vero che $[0, 1)$ è intersezione di A con un aperto vero di $\mathbb{R}$, ad esempio

$$\underset{U}{[0, 1)} = \underset{A}{[0, +\infty)} \cap \underset{B}{(-3, 1)}$$

<u>Def.</u> Un sottoinsieme $A \subseteq \mathbb{R}$ si dice <u>compatto per ricoprimenti</u> se ogni ricoprimento aperto di A ammette un sottoric. finito.
↖ costituito da un numero finito di piastrelle

<u>Def.</u> Un ricoprimento aperto di A è una famiglia di insiemi $\{U_i\}_{i \in I}$ tale che

(i) ogni U_i è aperto in A (per ogni $i \in I$)

(ii) $\bigcup_{i \in I} U_i = A$

(ovviamente gli U_i si possono sovrapporre tra di loro)

— o — o —

$\boxed{\text{TEOREMONE}}$ Sia $A \subseteq \mathbb{R}$.
Allora sono fatti equivalenti
(i) A è compatto (chiuso + limitato)
(ii) A è compatto per successioni
(iii) A è compatto per ricoprimenti

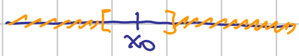
visto precedentemente

$\boxed{\text{Dim. che (iii)} \Rightarrow \text{(i)}}$ Per ipotesi A è compatto per ricoprim.
Tesi: A è chiuso e limitato.

Considero $U_n := (-n, n) \cap A \qquad n \in \mathbb{N}$
Allora U_n è aperto in A (intersezione di A con aperto vero di $\mathbb{R}$)
Inoltre gli U_n ricoprono A:

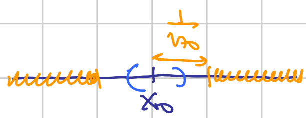
$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_n \supseteq A$$

Per ipotesi basta un numero finito degli U_n per ricoprire A.
Ma allora A è contenuto in $(-n_0, n_0)$ per un qualche n_0,
quindi è limitato.
Sia ora $x_0 \in \mathrm{Clos}(A)$. Considero



$$U_n = A \cap \underbrace{\left(\mathbb{R} \setminus \left[x_0 - \tfrac{1}{n}, x_0 + \tfrac{1}{n}\right]\right)}_{\text{aperto in } \mathbb{R}} = \text{aperto in } A$$

Supponiamo che $x_0 \notin A$, cioè A non è chiuso. Allora le
U_n ricoprono A. Ma allora ne basta un numero finito,
cioè esiste n_0 t.c.



$$A \subseteq \mathbb{R} \setminus \left[x_0 - \tfrac{1}{n_0}, x_0 + \tfrac{1}{n_0}\right]$$

Basta prendere un raggio $0 < r < \frac{1}{n_0}$ e ho trovato un
intervallino centrato in x_0 che non contiene pti di A,
quindi x_0 non sta in $\mathrm{Clos}(A)$.

—o—o—

Oss. Resta da fare che (i) $\Rightarrow$ (iii)

Perché 3 nozioni di compattezza? L'idea fondamentale è che

$\boxed{\text{le funzioni continue mandano compatti in compatti}}$

cioè se $f: A \to \mathbb{R}$ è continua e A è compatto, allora l'immagine $f(A)$ è compatta.

Questa è l'idea fondamentale di Weierstrass:

$\rightarrow$ A è compatto $\Rightarrow$ $f(A)$ è compatto $\Rightarrow$ $f(A)$ ammette max e min

qui sta il difficile di Weierstrass.

prop. iniziale

Ora: le funzioni continue in generale
- non mandano limitati in limitati
- non mandano chiusi in chiusi

Esempio $f(x) = \frac{1}{x}$

$(0,1)$ è limitato, ma $f((0,1)) = (1,+\infty)$
$[1,+\infty)$ è chiuso, ma $f([1,+\infty)) = (0,1]$ non è chiuso

— o — o —

ANALISI 1 — LEZIONE 106

Titolo nota 31/03/2015

$\boxed{\text{Prop. 1}}$ (Le funzioni continue mandano compatti per successioni in compatti per successioni).

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ e sia $f: A \to \mathbb{R}$.

Supponiamo che

(i) A compatto per successioni

(ii) f continua.

Allora $f(A)$ è compatto per successioni.

$\boxed{\text{Dim.}}$ Sia y_n una successione contenuta in $f(A)$.

Per definizione di immagine esistono $x_n \in A$ t.c. $y_n = f(x_n)$.

Poiché A è cpt. per successioni esiste una s.succ.

$$x_{n_k} \longrightarrow x_\infty \in A.$$

Poiché f è continua (quindi anche continua per succ.)

$$\begin{array}{ccc} f(x_{n_k}) & \longrightarrow & f(x_\infty) \\ \shortparallel & & \shortparallel \\ y_{n_k} & \longrightarrow & y_\infty \in f(A). \end{array}$$

Dim. di W. "smontata"

Se A è cpt. per successioni e f è continua, allora $f(A)$ è cpt. per successioni, quindi chiuso e limitato, quindi ammette max e min.

— o — o —

$\boxed{\text{Prop 2}}$ (Le funzioni continue mandano compatti per ricoprimenti in compatti per ricoprimenti)

Siano $A \subseteq \mathbb{R}$ e $f: A \to \mathbb{R}$. Supponiamo che

(i) A è cpt. per ricoprimenti

(ii) f è continua.

Allora $f(A)$ è compatto per ricoprimenti.

$\boxed{\text{Dim.}}$ Prendiamo un qualunque ricoprimento aperto di $f(A)$

$$f(A) = \bigcup_{i \in I} V_i \qquad V_i \text{ aperto in } f(A)$$

Pongo $\mathcal{U}_i = f^{-1}(V_i)$ e ho che

$$A = \bigcup_{i \in I} \mathcal{U}_i \qquad \text{(ovvio)}$$

e gli $\mathcal{U}_i$ sono aperti in A per la definizione topologica di continuità.

Poiché A è cpt. per ricoprimenti, ne basta un numero finito

$$A = \mathcal{U}_{i_1} \cup \ldots \cup \mathcal{U}_{i_m} \qquad \text{con } i_1, \ldots, i_m \in I.$$

Ma allora $f(A) = V_{i_1} \cup \ldots \cup V_{i_m}$, quindi ne basta un numero finito per ricoprire $f(A)$.

— o — o —

Resta da vedere che limitato + chiuso $\Rightarrow$ cpt. per ricoprimenti

<u>Lemma</u> (raggio magico) Sia A un insieme compatto per successioni. Sia $\{\mathcal{U}_i\}_{i \in I}$ un ricoprimento aperto di A. Allora esiste un raggio $r > 0$ con questa proprietà

$$\boxed{\forall x \in A, \ \exists i \in I \quad \text{t.c.} \quad (x-r, x+r) \cap A \subseteq \mathcal{U}_i}$$

Quello che è ovvio è che

$$\forall x \in A \ \exists r > 0 \ \exists i \ \text{t.c.} \ (x-r, x+r) \cap A \subseteq \mathcal{U}_i$$

La cosa non ovvia è che si può fare con un raggio r universale.

$\boxed{\text{Dim.}}$ Per assurdo supponiamo che tutti i raggi vadano male

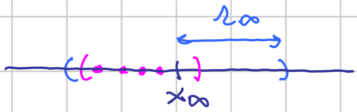
$$\forall r > 0 \ \exists x \in A \quad \forall i \in I \quad (x-r, x+r) \cap A \not\subseteq \mathcal{U}_i$$

Me la gioco con $r = \frac{1}{k}$. Trovo un p.to $x_k \in A$ tale

$(x_k - \frac{1}{k}, x_k + \frac{1}{k}) \cap A$ non è contenuto in nessun U_i.

Per compattezza x_k tende, a meno di sottosucc., a qualcosa, diciamo

$$x_{k_n} \longrightarrow x_\infty \in A.$$



Ora x_∞ sta in un certo U_{i_∞}, quindi $\exists\, r_\infty$ t.c.

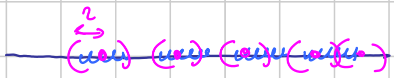
$$(x_\infty - r_\infty, x_\infty + r_\infty) \cap A \subseteq U_{i_\infty}$$

Ora definitivamente $x_{k_n} \in (x_\infty - \frac{r_\infty}{2}, x_\infty + \frac{r_\infty}{2})$ e quindi hanno garantito un raggio minimo uguale a $\frac{r_\infty}{2}$, il che contraddice il fatto che il raggio $\frac{1}{k_n}$ non vada bene.

— o — o —

<u>Dim. che compattezza $\Rightarrow$ compattezza per ricoprimenti</u>

Supponiamo A limitato più chiuso, quindi anche cpt. per succ. e prendiamo un qualunque ricoprimento U_i di A.
Questo ricoprimento avrà un raggio magico r
Ora posso ricoprire tutto A con un numero finito di intervallini di ampiezza r, cioè esiste un numero finito di pti $a_1, \dots, a_m$ t.c.



$$A \subseteq (a_1 - r, a_1 + r) \cup \dots \cup (a_m - r, a_m + r)$$

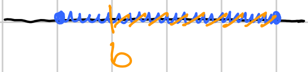
Ciascuno di questi intervallini è contenuto in qualche U_i perché l'ampiezza è il raggio magico. Quindi

$$A \subseteq \underbrace{U_{i_1}}_{\substack{\text{contiene} \\ (a_1 - r, a_1 + r)}} \cup \dots \cup \underbrace{U_{i_m}}_{\substack{\text{contiene} \\ (a_m - r, a_m + r)}}$$

$\boxed{\text{Dim. alternativa di Weierstrass}}$

Prendo l'insieme A, chiuso e limitato.
In particolare $A \subseteq [-M, M]$ per un opportuno M.
Prendo

$$\ell = \inf \{ f(x) : x \in A \}$$



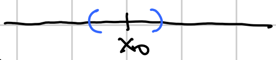
Dato $b \in [-M, M]$ andiamo a vedere

$$\inf \{ f(x) : x \in A \text{ e } x \geq b \}$$

Questo inf può valere ℓ o più di ℓ. Inoltre più b è grande più l'inf sarà grande. Considero

$$x_0 = \sup \{ b \in [-M, M] : \inf \{ f(x) : x \in A \text{ e } x \geq b \} = \ell \}$$

Dico che $x_0 \in A$ e x_0 è un p.to di minimo, cioè $f(x_0) = \ell$.

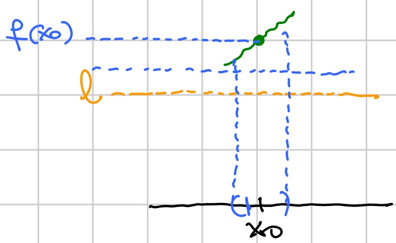


Perché $x_0 \in A$? Se $x_0 \notin A$, allora
non sta in A tutto un intorno $(x_0 - r, x_0 + r)$
Ma allora

$$\inf \{ f(x) : \underbrace{x \in A \text{ e } x \geq x_0 + r}_{\text{stesso insieme}} \} = \inf \{ f(x) : \underbrace{x \in A \text{ e } x \geq x_0 - r}_{\text{stesso insieme}} \} = \ell$$

il che contraddice che x_0 sia il sup.

Perché $f(x_0) = \ell$? Se non fosse così, allora sarebbe $f(x_0) > \ell$.
Per continuità esiste $r > 0$ t.c.



$$f(x) \geq \frac{f(x_0) + \ell}{2}$$

per ogni $x \in (x_0 - r, x_0 + r) \cap A$.
Ma allora

$\inf\{f(x) : x \in A \text{ e } x \geq x_0 - \frac{r}{2}\}$ è il minimo tra 2 quantità

- l'inf tra $[x_0 - \frac{r}{2}, x_0 + \frac{r}{2}]$ e questo è $\geq \frac{f(x_0) + \ell}{2}$
- l'inf per $x \geq x_0 + \frac{r}{2}$ che è $> \ell$ perché altrimenti x_0 non sarebbe il sup

Ne segue che l'inf per $x \geq x_0 - \frac{r}{2}$ è maggiore di ℓ, il

che contraddice che x_0 sia il sup.

— o — o —

ANALISI 1 — LEZIONE 107

Titolo nota 31/03/2015

Prop. Sia A compatto per successioni, sia $r > 0$.
Allora posso ricoprire A con un numero finito di intervalli con centro in A e ampiezza r, cioè esistono un intero $m \geq 1$ ed esistono p.ti $x_1, \dots, x_m \in A$ t.c.

$$A \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} (x_i - r, x_i + r)$$

Dim. Algoritmo: scelgo $x_1 \in A$ a caso.
Supposto di aver già fissato $x_1, \dots, x_k$ scelgo x_{k+1} t.c.
$x_{k+1} \in A$ e

$$x_{k+1} \notin \bigcup_{i=1}^{k} (x_i - r, x_i + r)$$

se non lo trovo, vuol dire che gli intervallini precedenti ricoprono.

Quindi, o mi fermo strada facendo (e quindi OK) o trovo una successione di p.ti x_k con la proprietà che

$$|x_m - x_n| \geq r \qquad \text{per ogni } m \text{ ed } n$$

Essendo A compatto la successione x_n dovrebbe avere una sottosuccessione convergente, ma questo non è possibile perché nessuna sottosucc. può essere di Cauchy

non possono esserci infiniti elementi che distano $\geq r$ l'uno dall'altro.

FUNZIONI SEMICONTINUE

Def. Sia $A \subseteq \mathbb{R}$, sia $f: A \to \mathbb{R}$, sia $x_0 \in A$.
Si dice che f è semicontinua inferiormente in x_0 se

$$\boxed{\liminf_{x \to x_0} f(x) \geq f(x_0)}$$

(Questo presuppone x_0 p.to di accumulazione. Se è isolato la semicontinuità è gratis)

Si dice che f è semicontinua superiormente in x_0 se

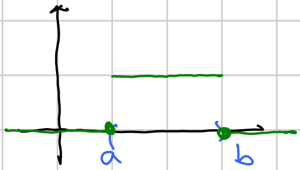
$$\boxed{\limsup_{x \to x_0} f(x) \leq f(x_0)}$$

Brutalmente: → $f(x)$ è continua se al limite vale quello che uno si aspetta
→ $f(x)$ è semicont. inf. (SCI o LSC) se al limite può solo crollare (in basso)
→ $f(x)$ è semicont. sup (SCS o USC) se al limite può solo diventare molto più grande

Esempi ① le funzioni continue sono anche SCI e SCS
② La funzione caratteristica di (a,b), cioè

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in (a,b) \\ 0 & \text{se } x \notin (a,b) \end{cases}$$

è SCI. Analogo per le funzioni caratteristiche degli aperti



③ La funzione

$$f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ a & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

- SCI se e solo se $a \leq -1$
- SCS se e solo se $a \geq 1$

Def. Si dice che f è SCI in A se è SCI in tutti i p.ti di A.

Definizioni equivalenti Una funzione $f: A \to \mathbb{R}$ è SCI in A se e solo se

(i) vale $\liminf_{x \to x_0} f(x) \geq f(x_0)$ per ogni $x_0 \in D(A)$

(ii) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ t.c.

$$f(x_0) - \varepsilon \leq f(x) \qquad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap A$$

(iii) per ogni successione $A \ni x_n \to x_\infty \in A$ si ha

$$\liminf_{n \to +\infty} f(x_n) \geq f(x_\infty)$$

Le dimostrazioni sono analoghe al caso della continuità.

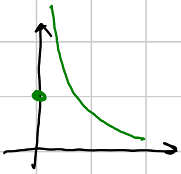
Prop. Siano $f: A \to \mathbb{R}$ e $g: A \to \mathbb{R}$ funzioni SCI. (SCS)
Allora $f + g$ è SCI. (SCS)

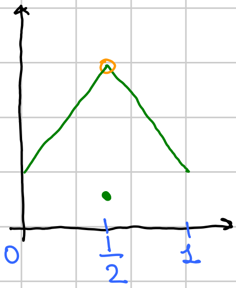
Dim.
$$\liminf_{x \to x_0} [f(x) + g(x)] \underset{\text{teo. alg}}{\geq} \liminf_{x \to x_0} f(x) + \liminf_{x \to x_0} g(x)$$
$$\geq f(x_0) + g(x_0)$$
$$= (f+g)(x_0). \quad \square$$

$\boxed{\text{Teorema}}$ (Vero Weierstrass) Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ e sia $f : A \to \mathbb{R}$.
Supponiamo che
(i) A compatto
(ii) f SCI in A (SCS)
Allora esiste per forza

$$\min \{ f(x) : x \in A \} \qquad (\text{MAX})$$

Oss. Il max potrebbe non esistere, vedi figura/e





$\boxed{\text{Dim.}}$ Sia $\ell = \inf \{ f(x) : x \in A \} = \inf f(A)$.
Per il solito lemma esiste $y_n \in f(A)$ t.c. $y_n \to \ell$.
Per definizione di immagine esistono $x_n \in A$ t.c. $y_n = f(x_n)$
cioè

$$f(x_n) \longrightarrow \ell \qquad (\text{succ. minimizzante})$$

Poiché A è cpt. esiste una s.succ. conv. ad un elemento di A:

$$x_{n_k} \longrightarrow x_\infty \in A$$

Per semicontinuità

$$\ell \underset{\substack{\uparrow \\ \ell \text{ è l'inf}}}{\leq} f(x_\infty) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{def. di} \\ \text{SCI}}}{\leq} \liminf f(x_{n_k}) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{perché } f(x_n) \to \ell \\ \text{dunque tutte le} \\ \text{s.succ.} \to \ell}}{=} \lim f(x_n) = \ell$$

Essendo RHS = LHS, ci sono tutte uguaglianze, quindi $f(x_\infty) = \ell$.

— o — o —

Osservazione Le funzioni SCI in un insieme A non sono uno spazio vettoriale. Il problema è il prodotto per costanti negative, anzi

$$\boxed{f \text{ è SCI} \iff -f \text{ è SCS}}$$

Segue dal fatto che mettendo un segno $-$ davanti liminf e liminsup si scambiano

Moltiplicare per costanti positive preserva LSC e USC.

In generale il prodotto si comporta bene solo moltiplicando per funzioni positive.

Esempio La funzione di Dirichlet

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{se } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

non è SCI e non è SCS perchè ci sono succ. in $\mathbb{Q}$ che tendono a numeri irrazionali e viceversa.
Volendo è SCI in $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ e SCS in $\mathbb{Q}$.

— o — o —

ANALISI 1 – LEZIONE 108

Titolo nota 14/04/2015

FUNZIONI UNIFORMEMENTE CONTINUE

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ e sia $f : A \to \mathbb{R}$.

<u>Def. di continuità</u> (ε/δ) Si dice che f è continua in A se

$$\boxed{\forall x \in A \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \text{t.c.} \ |f(x) - f(y)| < \varepsilon \quad \forall y \in (x-\delta, x+\delta) \cap A}$$

δ dipende da ε ed x
Potrei scrivere $\delta(\varepsilon, x)$

Ancora più precisamente

$$\boxed{\forall x \in A \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall y \in (x-\delta, x+\delta) \cap A \quad |f(x) - f(y)| < \varepsilon}$$

<u>Def. di continuità UNIFORME</u> Si dice che f è <u>unif. cont.</u> in A se

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x \in A \ \forall y \in (x-\delta, x+\delta) \cap A \quad |f(x) - f(y)| < \varepsilon}$$

dipende solo da ε e
va bene per tutti gli $x \in A$, quindi δ è UNIFORME

Cosa vuol dire che f <u>NON</u> è unif. continua. Devo negare la definizione.

$$\boxed{\exists \varepsilon_0 > 0 \ \forall \delta > 0 \ \exists x \in A \ \exists y \in (x-\delta, x+\delta) \cap A \quad |f(x) - f(y)| \geq \varepsilon_0}$$

negazione dell' unif. continuità

Brutalmente: esistono x e y in A vicini quanto voglio, ma con le immagini distanti.

Prop. Sia $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione Lipschitziana.
Allora f è unif. continua in A.

Dim. Per ipotesi esiste L tale che

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x-y| \qquad \forall x \in A \quad \forall y \in A$$

Voglio dim. che f è unif. continua. Scelgo $\varepsilon > 0$ qualunque e voglio trovare $\delta = \delta(\varepsilon)$ tale che

$$|x-y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

Basta scegliere $\delta > 0$ t.c. $L\delta = \varepsilon$, cioè $\delta = \frac{\varepsilon}{L}$.
Allora

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x-y| \underset{|x-y|<\delta}{<} L\delta = \varepsilon$$

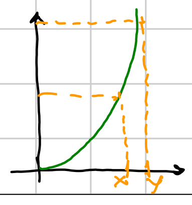
Oss. importante L'unif. continuità dipende dall'insieme, cioè una certa $f(x)$ può essere unif. continua in un insieme e non in un altro.

Esempio $f(x) = x^2$ $\quad A = [-5, 7]$
In questo insieme è Lip., quindi unif. continua

$f(x) = x^2$ $\quad A = \mathbb{R}$ $\quad$ Dico che su questo insieme non è unif. continua. Per dimostrarlo, devo trovare x e y in $\mathbb{R}$ molto vicini con le immagini lontane. Posso fare

$x = a, \quad y = a + \delta$ $\qquad y^2 - x^2 = (a+\delta)^2 - a^2$
$$= 2a\delta + \delta^2 \geq 2a\delta$$

Se prendo $a = \frac{1}{\delta}$ ho ottenuto due p.ti x e y che distano δ, le cui immagini distano almeno 2



Oss. Dal p.to di vista pratico, l'uniforme continuità risponde a questa domanda: voglio approssimare $f(x)$ commettendo un errore $< \varepsilon$. Basta calcolare $f(y)$ con un qualunque y che approssima x a meno di δ.
Se l'errore orizzontale è piccolo, allora l'errore verticale è piccolo.

Proprietà semplici delle funz. unif. continue

① La somma di funz. unif. cont. in A è unif. continua in A.

Dim. Siano $f: A \to \mathbb{R}$ e $g: A \to \mathbb{R}$ unif. cont.
Fisso $\varepsilon > 0$.
Per l'unif. continuità di $f(x)$ esiste $\delta_1 > 0$ t.c.

$$|x-y| < \delta_1 \quad x \in A \quad y \in A \implies |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Analogamente per la $g(x)$ esiste $\delta_2 > 0$ t.c.

$$|x-y| < \delta_2 \quad x \in A \quad y \in A \implies |g(x) - g(y)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Ma allora se $|x-y| < \min\{\delta_1, \delta_2\}$ per forza

$$|f(x)+g(x) - f(y) - g(y)| \leq \underbrace{|f(x) - f(y)|}_{< \frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{|g(x) - g(y)|}_{< \frac{\varepsilon}{2}} < \varepsilon$$

② Il prodotto di una funz. unif. cont. per una costante è unif. cont.

Dim. $f: A \to \mathbb{R}$ unif. cont. $\lambda \in \mathbb{R}$. Se $\lambda = 0$ è banale.
Altrimenti

$$|\lambda f(x) - \lambda f(y)| = |\lambda| \cdot \underbrace{|f(x) - f(y)|}_{< \frac{\varepsilon}{|\lambda|}} < \varepsilon$$

Basta scegliere $\delta > 0$ t.c. $|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{|\lambda|}$ se $|x-y| < \delta$

③ Il prodotto di due funz. unif. cont. in generale $\boxed{\text{NON}}$ è unif. cont.

Esempio $f(x) = x$ è Lip. in $\mathbb{R}$, quindi unif. cont.
$f(x) \cdot f(x) = x^2$ non lo è.

④ $f(x)$ e $g(x)$ sono unif. cont. + limitate, allora $f(x) \cdot g(x)$ è unif. continua.

$\boxed{\text{Dim.}}$

Brutta:

termini misti

$$
\begin{aligned}
|f(x)g(x) - f(y)g(y)| &\le |f(x)g(x) - f(x)g(y)| + |f(x)g(y) - f(y)g(y)| \\
&= |f(x)| \cdot |g(x) - g(y)| + |g(y)| \cdot |f(x) - f(y)| \\
&\le M \underbrace{|g(x) - g(y)|}_{\le \frac{\varepsilon}{2M}} + M \underbrace{|f(x) - f(y)|}_{\le \frac{\varepsilon}{2M}} \\
&= \varepsilon
\end{aligned}
$$

Fisso $\varepsilon > 0$. Sia M t.c. $|f(x)| \le M$ per ogni $x \in A$
$|g(x)| \le M$ per ogni $x \in A$

Uso unif. cont. di $f(x)$ con $\frac{\varepsilon}{2M}$ e trovo $\delta_1 > 0$ t.c. ...

" " " " $g(x)$ con $\frac{\varepsilon}{2M}$ e trovo $\delta_2 > 0$ t.c. ...

Quindi se $|x-y| < \min\{\delta_1, \delta_2\}$ allora faccio il conto della brutta.

Esercizio E se una sola delle 2 è limitata?

⑤ $f(x)$ unif. cont. in A + unif. cont. in B $\Rightarrow$ unif. cont. in $A \cup B$

NO! Esempio $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{per } x > 0 \quad (A) \\ -1 & \text{per } x < 0 \quad (B) \end{cases}$

6. $f(x)$ unif. cont. in $[0,2]$ + unif. cont. in $[1,3]$
Allora $f(x)$ è unif. cont. in $[0,3]$.
(Esercizio)

<u>Oss. filosofica</u> La continuità è un concetto puntuale,
l'unif. continuità dipende dall'insieme.
La continuità è un concetto topologico,
l'unif. continuità è un concetto metrico.

— o — o —

ANALISI 1 — LEZIONE 109

Titolo nota 14/04/2015

TEOREMI SULLE FUNZIONI UNIF. CONTINUE

Teorema 1 (HEINE – CANTOR)

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ e sia $f: A \to \mathbb{R}$.

Supponiamo che

(i) f è continua

(ii) A è compatto.

Allora f è unif. continua.

Teorema 2 (Teorema di estensione)

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ e sia $f: A \to \mathbb{R}$.

Supponiamo che f sia uniformemente continua in A.

Allora è possibile estendere f ad una funzione continua su $\mathrm{Clos}(A)$, cioè esiste $\hat{f}: \mathrm{Clos}(A) \to \mathbb{R}$ continua t.c.

anzi unif. continua

$$\hat{f}(x) = f(x) \qquad \forall x \in A.$$

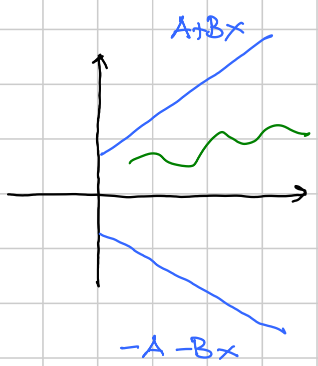
Proposizione (Unif. continua $\Rightarrow$ sublineare)

Sia $a \in \mathbb{R}$ e sia $f: \underbrace{[a, +\infty)}_{\text{semiretta}} \to \mathbb{R}$

Supponiamo che f sia unif. continua.

Allora f è sublineare, cioè esistono $A \in \mathbb{R}$ e $B \in \mathbb{R}$ t.c.

$$|f(x)| \leq A + Bx \qquad \forall x \geq a$$



$\boxed{\text{Proposizione}}$ Sia $a \in \mathbb{R}$ e sia $f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$

Supponiamo che

(i) f è continua in $[a, +\infty)$

(ii) esiste

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$$

Allora f è unif. continua in $[a, +\infty)$.

$\boxed{\text{Corollario}}$ Sia $a \in \mathbb{R}$ e siano $f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ e
$g : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$

Supponiamo che

(i) f è continua in $[a, +\infty)$

(ii) g è unif. continua in $[a, +\infty)$

(iii) $\lim_{x \to +\infty} f(x) - g(x) = 0$

Allora f è unif. continua in $[a, +\infty)$.

$\boxed{\text{Dim.}}$ $f(x) = \underbrace{g(x)}_{\text{unif. cont.}} + \underbrace{[f(x) - g(x)]}_{\text{continua + ha limite a } +\infty, \text{ quindi è unif. cont.}}$

—o—o—

$\boxed{\text{Dim Heine - Cantor per assurdo}}$ Supponiamo per assurdo che f non sia unif. continua in A. Allora

$$\exists \varepsilon_0 > 0 \ \forall \delta > 0 \ \exists x \in A \ \exists y \in (x - \delta, x + \delta) \cap A \quad |f(x) - f(y)| \geq \varepsilon_0$$

Me la gioco con $\delta = \frac{1}{k}$ (o qualunque cosa che tenda a 0)

Trovo x_k e y_k in A t.c.

$$|x_k - y_k| \leq \frac{1}{k} \qquad |f(x_k) - f(y_k)| \geq \varepsilon_0$$

Poiché A è compatto, quindi compatto per successioni, esiste una s. succ. di x_k che converge ad un certo $x_\infty \in A$, diciamo

$$x_{k_n} \longrightarrow x_\infty$$ USO COMPATTEZZA

stesso.

Allora anche $y_{k_n} \longrightarrow x_\infty$ per i carabinieri

$$x_{k_n} - \frac{1}{k_n} \leq y_{k_n} \leq x_{k_n} + \frac{1}{k_n}$$

Ma allora $\quad |f(x_{k_n}) - f(y_{k_n})| \geq \varepsilon_0$

USO CONTINUITÀ PER SUCCESSIONI

$$0 = |\underbrace{f(x_\infty) - f(x_\infty)}_{0}| \geq \varepsilon_0$$

<u>Lemma 1</u> Se $x \in \operatorname{Clos}(A)$, allora esiste

$$A \ni a_n \longrightarrow x$$

<u>Lemma 2</u> Le funzioni unif. continue mandano succ. di Cauchy in succ. di Cauchy. Detto meglio:
se $f: A \to \mathbb{R}$ è unif. cont. e a_n è una succ. di Cauchy in A, allora $f(a_n)$ è di Cauchy in $\mathbb{R}$

<u>Oss.</u> Non è vero per le funzioni continue $\left(f(x) = \frac{1}{x},\ a_n = \frac{1}{n} \right)$

$\boxed{\text{Dim. Lemma 2}}$ Voglio dim. che $f(a_n)$ è di Cauchy, cioè

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \text{t.c.} \quad |f(a_n) - f(a_m)| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0 \quad \forall m \geq n_0$$

Prendo ε e prendo il corrispondente $\delta > 0$ dato dalla unif. continuità. Scelgo $n_0 \in \mathbb{N}$ in modo tale che

$$|a_n - a_m| < \delta \qquad \forall n \geq n_0 \quad \forall m \geq n_0$$ (posso perché a_n è di Cauchy)

Ma allora per unif. cont.

$$|f(a_n) - f(a_m)| < \varepsilon$$

$\boxed{\text{Dim. teo. di estensione}}$ Devo definire $\hat{f} : \text{Clos}(A) \to \mathbb{R}$ che estende f.

Prendo $x \in \text{Clos}(A)$. Per il lemma 1 esiste

$$A \ni a_n \longrightarrow x.$$

Poiché a_n ha limite, sarà sicuramente di Cauchy.

Per il lemma 2 anche $f(a_n)$ è di Cauchy.

Per la completezza dei reali $f(a_n)$ ha limite.

Posso quindi definire

$$\hat{f}(x) = \underbrace{\lim_{n \to +\infty} f(a_n)}_{\text{ho appena dimostrato che esiste}}$$

Serve una verifica importante. Se $A \ni b_n \to x$ è un'altra successione, allora deve succedere che

$$\lim_{n\to+\infty} f(a_n) = \lim_{n\to+\infty} f(b_n)$$

Modo elegante: costruire una terza $c_n \to x$ usando a_n sui pari e b_n sui dispari.

In alternativa, fisso $\varepsilon > 0$ qualunque e prendo il δ corrispondente della uniforme continuità.

Definitivamente

$$|a_n - b_n| \le \underbrace{|a_n - x|}_{< \frac{\delta}{2}} + \underbrace{|b_n - x|}_{< \frac{\delta}{2}} < \delta$$

quindi per unif. continuità $|f(a_n) - f(b_n)| < \varepsilon$.

Passando al limite per $n \to +\infty$ ho che i 2 limite distano meno di ε. Poiché ε è arbitrario ho finito, cioè $\hat{f}$ è ben definita.

Restano da fare 2 cose:

1. dimostrare che estende f
2. dimostrare che $\hat{f}$ è unif. continua in $\text{Clos}(A)$.

① è facile: se $x \in A$, allora lo posso approssimare con $a_n \equiv x$ da cui

$$\hat{f}(x) = \lim_{n \to +\infty} f(a_n) = f(x)$$

② Dimostro che $\hat{f}$ è unif. continua in $\mathrm{Clos}(A)$ con gli stessi ε/δ che andavano bene per f.
Devo dim. che $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ t.c.

$$x \in \mathrm{Clos}(A),\ y \in \mathrm{Clos}(A),\ |x-y| < \delta \Rightarrow |\hat{f}(x) - \hat{f}(y)| < \varepsilon$$

Per definizione di $\hat{f}$ esistono

$$A \ni a_n \to x \qquad f(a_n) \to \hat{f}(x)$$
$$A \ni b_n \to y \qquad f(b_n) \to \hat{f}(y)$$

Definitivamente $\underbrace{|a_n - b_n|}_{\text{tende a } |x-y| < \delta} < \delta$

Ma allora per uniforme continuità (ho usato il δ che corrisp. a ε)

$$|f(a_n) - f(b_n)| < \varepsilon$$

Passando al limite ottengo

$$|\hat{f}(x) - \hat{f}(y)| \leq \varepsilon.$$

Se volevo $< \varepsilon$ potevo partire all'inizio con il δ che corrisponde a $\frac{\varepsilon}{2}$

— o — o —

ANALISI 1 – LEZIONE 110

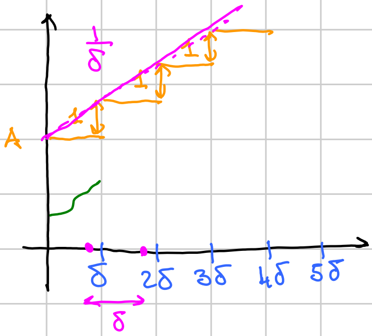
Titolo nota 14/04/2015

Prop: f unif. continua in $[0,+\infty) \Rightarrow |f(x)| \leq Ax + B$

$\boxed{\text{Dim.}}$ Uso la definizione di unif. cont. con $\varepsilon = 1$ (o con $\varepsilon = 14$).
Esiste $\delta > 0$ tale che

$$|f(x) - f(y)| \leq 1 \qquad \forall x \geq 0 \quad \forall y \geq 0 \quad \text{con } |x-y| \leq \delta$$

Brutta: nel primo tratto $[0,\delta]$ $|f(x)|$ sta sotto un certo A. Passando da un tratto al successivo $|f(x)|$ può crescere al massimo di 1 rispetto al precedente.



Pongo $\quad A := \max\{|f(x)| : x \in [0,\delta]\} \qquad B := \frac{1}{\delta}$

Dimostro per induzione che

$$|f(x)| \leq A + k \qquad \forall x \in \overbrace{[k\delta, (k+1)\delta]}^{k\text{-esimo tratto}}$$

Il caso $k=0$ è la definizione di A. Suppongo che valga con un certo k e la dimostro per $k+1$

$$|f(x)| \leq \underbrace{|f(x-\delta)|}_{\substack{\leq A+k \\ \text{perché sta nel} \\ \text{tratto prec. } (x-\delta)}} + \underbrace{|f(x) - f(x-\delta)|}_{\leq 1 \text{ per unif. cont.}} \leq A + k + 1$$

Per concludere basta osservare che $A + k \leq A + \frac{1}{\delta}x$ per ogni $x \in [k\delta, (k+1)\delta]$ $\left(x \geq k\delta \Rightarrow A + \frac{1}{\delta}x \geq A + \frac{1}{\delta}\delta k = A + k\right)$

—o—o—

Lemma Sia $a \geq 0$, sia $f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$, sia $b > a$.
Supponiamo che
(i) f è unif. continua in $[a, b]$
(ii) f è unif. continua in $[b, +\infty)$
Allora f è unif. continua in $[a, +\infty)$

$\boxed{\text{Dim.}}$ Fisso $\varepsilon > 0$ e uso la def. in $[a,b]$ e $[b, +\infty)$ con $\frac{\varepsilon}{2}$.
Trovo $\delta_1 > 0$ t.c.

$$x \in [a,b],\ y \in [a,b],\ |x-y| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2}$$
$$x \geq b \ ,\ y \geq b \ ,\ |x-y| < \delta_2 \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Dico che $\min\{\delta_1, \delta_2\} =: \delta$ va bene per ogni $x \geq a$, $y \geq a$.
Ci sono 3 casi
- se x e y sono $\leq b$ allora Ok
- se x e y sono $\geq b$ allora Ok
- resta wlog $x \leq b \leq y$. Allora

$$|f(x) - f(y)| \leq \underbrace{|f(x) - f(b)|}_{\substack{< \frac{\varepsilon}{2} \\ \text{unif. cont. in } [a,b]}} + \underbrace{|f(b) - f(y)|}_{\substack{< \frac{\varepsilon}{2} \\ \text{unif. cont. in } [b,+\infty)}} < \varepsilon.$$

— o — o —

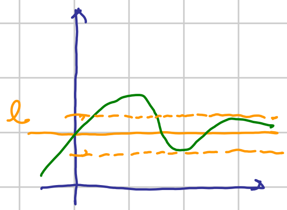
Prop. $f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ continua + $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow f$ è unif. continua in $[a, +\infty)$

$\boxed{\text{Dim.}}$ Fisso $\varepsilon > 0$. Voglio trovare $\delta > 0$ t.c.

$$x \geq a,\ y \geq a \quad |x-y| < \delta \quad \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Per definizione di limite esiste $k \in \mathbb{R}$ t.c.



$$|f(x) - \ell| \leq \frac{\varepsilon}{4} \qquad \forall x \geq k$$

In particolare

$$|f(x)-f(y)| \le |f(x)-\ell| + |f(y)-\ell| \le \frac{\varepsilon}{2} \qquad \underbrace{\forall x \ge k \ \ \forall y \ge k}_{\text{anche se lontani tra di loro}}$$

Per Heine – Cantor f è unif. continua in $[a,k]$, quindi esiste $\delta > 0$ t.c.

$$\forall x \in [a,k],\ \forall y \in [a,k], \quad |x-y| < \delta \Rightarrow |f(x)-f(y)| < \varepsilon/2$$

Dico che lo stesso δ va bene su tutto $[a,+\infty)$.
Ci sono 3 casi

- $x \ge k$ e $y \ge k$ ⇝ OK, anche se $|x-y| > \delta$
- x e y in $[a,k]$ ⇝ OK perchè δ l'ho scelto lì
- se wlog $x < k < y$, allora concludo come nel lemma mettendolo k in mezzo.

— o — o —

Esempio 1 $\quad f(x) = \sqrt{x}$ è unif. cont. in $[0,+\infty)$? SI

Dim. È unif. cont. in $[0,5]$ per H-C.
È unif. cont. in $[5,+\infty)$ perchè è lip.
Per il lemma di rincollamento posso concludere

Esempio 2 $\quad f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ è unif. cont. in $(0,1)$? SI

Dim. La posso estendere ad una funzione continua in $[0,1]$.
L'estensione è unif. cont. per H-C in $[0,1]$
Quindi è unif. cont. anche in $(0,1)$.

Fatto generale $\quad f : A \to \mathbb{R}$ unif. cont. in A e $B \subseteq A$
$\Rightarrow f$ è unif. cont. in B (c'è meno richiesta)

Esempio 3 $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ è unif. cont. in $(0, +\infty)$? SI

Lo è in $(0, 1]$ come prima
Lo è in $[1, +\infty)$ perchè esiste il limite
Concludo con il lemma di rincollamento

Esempio 4 $f(x) = \log x$ è unif. cont. in $(0, +\infty)$?

NO: se lo fosse sarebbe estendibile con continuità a $[0, +\infty)$

e in $(3, +\infty)$? Sì, perchè è lip!

Esempio 5 $f(x) = \frac{\sin(x^{20})}{x^2}$ è unif. cont. in $(0, +\infty)$?

SI, come in un esempio prec.

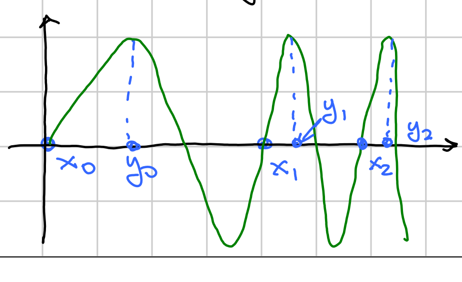
È lip. in $(0, +\infty)$? NO! Basta calcolare la derivata e vedere che non è limitata, ad esempio perchè $\limsup_{x \to +\infty} f'(x) = +\infty$

Esempio 6 $f(x) = \cos \frac{1}{x}$ è unif. cont. in $(0, 1)$?

NO: sarebbe estendibile

Esempio 7 $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ limitata e non unif. cont.

Basta prendere $f(x) = \sin(x^2)$. Per dimostrarlo bisogna trovare a mano p.ti x, y vicini con immagini lontane



$\boxed{\text{Idea per dim. alternativa di H-C.}}$ $f: \underset{\text{compatto}}{A} \to \mathbb{R}$ continua

Fisso $\varepsilon > 0$

Poichè è continua

$$\forall x \in A \quad \exists \underset{\delta(\varepsilon, x)}{\delta > 0} \quad \text{t.c.} \quad y \in (x-\delta, x+\delta) \cap A$$

$$\Rightarrow \quad |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

Mi piacerebbe tanto se fosse vero che

$$\inf \{ \delta(\varepsilon, x) : x \in A \} =: \delta > 0$$

Se io riuscissi a dimostrare che $x \to \delta(\varepsilon, x)$ è una funzione SCI (semicont. inf.), allora essendo A compatto avrebbe minimo, il minimo è $\delta(\varepsilon, x_0)$ per un opportuno $x_0 \in A$, quindi > 0.

Per definirlo bene, devo prendere in ogni x il valore $\delta(\varepsilon, x)$ migliore (più grande) che fa tornare la continuità.

Dimostrare che è SCI è un esercizio.

— o — o —

ANALISI 1 — LEZIONE 111

Titolo nota 15/04/2015

FUNZIONI HÖLDERIANE

Def. Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ e sia $f: A \to \mathbb{R}$ e sia $\alpha \in (0,1)$.
Si dice che f è <u>α-Hölderiana</u> in A se esiste una costante H tale che

$$\boxed{|f(y)-f(x)| \leq H\,|y-x|^{\alpha} \qquad \forall x \in A \quad \forall y \in A}$$

Esempio $A = [0,+\infty)$ $\quad f(x) = \sqrt{x}$ è $\frac{1}{2}$-Hölderiana.
Infatti

$$|\sqrt{y}-\sqrt{x}| \leq H\,|x-y|^{1/2} = H\sqrt{|y-x|} \qquad \forall x \geq 0 \ \forall y \geq 0$$

La disuguaglianza è vera anche con $H=1$. Infatti

$$|\sqrt{y}-\sqrt{x}| \overset{?}{\leq} |y-x|^{1/2} \iff y+x-2\sqrt{xy} \overset{?}{\leq} |y-x|$$

wlog $y \geq x$, quindi $\quad \cancel{y}+x-2\sqrt{xy} \overset{?}{\leq} \cancel{y}-x \iff 2x \leq 2\sqrt{xy}$
$\iff \sqrt{x} \leq \sqrt{y}$ ok.

Oss. La Lipschitzianità è Hölderianità con $\alpha = 1$.

Oss. Se A è un intervallo, allora le funzioni α-Hölderiane con $\alpha > 1$ sarebbero solo le costanti.

$\boxed{\text{Dim.}}$ L'idea è che $f'(x_0) = 0$ ovunque nell'intervallo.

$$|f'(x_0)| = \lim_{h\to 0} \frac{|\overset{y}{f(x_0+h)} - \overset{x}{f(x_0)}|}{|h|} \leq \lim_{h\to 0} \frac{H\,|\overset{y-x}{h}|^{\alpha}}{|h|} = 0 \text{ se } \alpha > 1.$$

Oss. L'Hölderianità è una proprietà metrica e globale, cioè dipende dall'insieme A.

Prop. Se $f: A \to \mathbb{R}$ è α-Hölderiana per un qualche $\alpha \in (0,1)$, allora f è unif. continua in A.

$\boxed{\text{Dim.}}$ (Stessa del caso lip.) Fisso $\varepsilon > 0$. Scelgo δ in modo che $H\delta^\alpha = \varepsilon$, cioè

$$\delta = \left(\frac{\varepsilon}{H}\right)^{1/\alpha}$$

Allora per ogni x e y in A con $|x-y| < \delta$ si avrà

$$|f(x) - f(y)| \leq H\,|y-x|^\alpha < H\delta^\alpha = \varepsilon$$

e quindi è unif. continua.

— o — o —

Esercizio $A = [0, +\infty)$ $\qquad f(x) = \sqrt[62]{x}$

Dimostrare che $f(x)$ è $\frac{1}{62}$ - Hölderiana.

Devo dim. che $\left|\sqrt[62]{y} - \sqrt[62]{x}\right| \leq \underset{\overset{\parallel}{1}}{H}\sqrt[62]{|y-x|}$

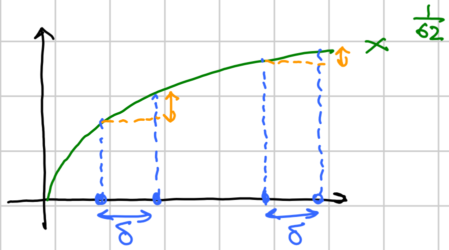
wlog $y \geq x$, pongo $y = x + \delta$. Mi riduco a dim. che

$$\underbrace{(x+\delta)^{\frac{1}{62}} - x^{\frac{1}{62}}}_{g(x)} \leq \delta^{\frac{1}{62}}$$

Spero che $g(x)$ sia deb. decrescente. A quel p.to $g(x) \leq g(0) = \delta^{\frac{1}{62}}$

$$g'(x) = \frac{1}{62}\,\frac{1}{(x+\delta)^{61/62}} - \frac{1}{62}\,\frac{1}{x^{61/62}} \leq 0.$$

A parità di diff. orizz., la diff. verticale decresce quando x aumenta



Proprietà delle funzioni α-Hölderiane

① f α-Höld e g α-Höld $\Rightarrow$ $f+g$ α-Höld

$\boxed{\text{Dim.}}$ $|f(y)+g(y)-f(x)-g(x)|$

$$\leq |f(y)-f(x)| + |g(y)-g(x)|$$

$$\leq H_f\,|y-x|^\alpha + H_g\,|y-x|^\alpha$$

$$= (H_f+H_g)\,|y-x|^\alpha$$

② f α-Höld, $\lambda\in\mathbb{R}$ $\Rightarrow$ $\lambda f(x)$ α-Höld

$\boxed{\text{Dim.}}$ Esercizio

③ f e g α-Höld + limitate $\Rightarrow$ $f(x)\cdot g(x)$ α-Höld

$\boxed{\text{Dim.}}$ $|f(y)g(y)-f(x)g(x)|$ ... termine misto ...

$$\leq |f(y)g(y)-f(x)g(y)| + |f(x)g(y)-f(x)g(x)|$$

$$= |g(y)|\cdot|f(y)-f(x)| + |f(x)|\cdot|g(y)-g(x)|$$

$$\leq M_g\cdot H_f\,|y-x|^\alpha + M_f\cdot H_g\,|y-x|^\alpha$$

$$= (M_g\cdot H_f + M_f\cdot H_g)\,|y-x|^\alpha$$

Esercizio Mostrare che basta che una sia non limitata e la tesi non è più vera

④ f α-Hölderiana, g β-Hölderiana (in regioni compatibili)
$\Rightarrow$ $g(f(x))$ è $\alpha\beta$-Hölderiana

$\boxed{\text{Dim.}}$
$$|g(f(y)) - g(f(x))| \underset{\substack{\uparrow \\ g \text{ è } \beta\text{-Höld}}}{\leq} H_g\, |f(y) - f(x)|^{\beta}$$
$$\underset{\substack{\uparrow \\ f \text{ è } \alpha\text{-Höld}}}{\leq} H_g\, H_f^{\beta}\, |y-x|^{\beta\alpha}$$

⑤ Siano $0 < \beta < \alpha \leq 1$. Sia $f : A \to \mathbb{R}$ α-Hölderiana
Supponiamo che A sia un insieme $\boxed{\text{LIMITATO}}$
Allora f è β-Hölderiana.

$\boxed{\text{Dim.}}$
$$|f(y) - f(x)| \leq H\,|y-x|^{\alpha}$$
$$= H\,|y-x|^{\beta} \cdot |y-x|^{\overbrace{\alpha-\beta}^{>0}}$$
$$\leq \underbrace{H\,[\text{diam}(A)]^{\alpha-\beta}}_{\text{costante di } \beta\text{-Hölderianità}} \cdot |y-x|^{\beta}$$

diam (A) = diametro di A = sup (A) − inf (A)
è finito se e solo l'insieme A è limitato

⑥ Se f è α-Hölderiana in A e $B \subseteq A$, allora f è α-Höld in B (Dim: banale)

⑦ Se f è α-Höld in A e in B, allora in generale NON è α-Höld in $A \cup B$ (solito esempio: $+1$ per $x > 0$, -1 per $x < 0$), ma è vero se

$$\max A = \min B$$
in particolare esistono

$\boxed{\text{Dim}}$: esercizio uguale all'uniforme continuità

$\boxed{\text{RIASSUNTO}}$

$\boxed{\text{Fatto 1}}$ Se $f : A \to \mathbb{R}$ e A qualunque, allora

$$\boxed{f \ \alpha\text{-Höld in } A \Rightarrow f \text{ unif. cont. in } A \Rightarrow f \text{ cont. in } A}$$

anche per $\alpha = 1$

$\boxed{\text{Fatto 2}}$ Se $f : A \to \mathbb{R}$ e A limitato, allora

$$f \text{ lip. in } A \Rightarrow f \ \alpha\text{-Höld in } A \Rightarrow f \ \beta\text{-Höld in } A$$
$$\Downarrow$$
$$f \text{ unif. cont. in } A$$
$$\Downarrow$$
$$f \text{ cont. in } A$$

Per $0 < \beta < \alpha \leq 1$

Achtung! Tutte le implicazioni inverse sono FALSE!!!

Notazione Si dice che $f \in C^{0,\alpha}(A)$ se f è α-Höld in A.
$f \in C^{k,\alpha}(A)$ se f è C^k in A e
$f^{(k)} \in C^{0,\alpha}(A)$.

— o — o —

ANALISI 1 — LEZIONE 112

Titolo nota 15/04/2015

Come dimostro che una funzione è o non è Lip., Hölder, unif. continua?

Unif. continuità

Se sono per il $\boxed{SI}$:

→ Heine - Cantor

→ Heine - Cantor su un insieme più grande

→ uso Lip. o Hölder

→ divido l'insieme in due parti, ragiono separatamente e poi spero nel rincollamento

→ spero nella semiretta + limite all'infinito

→ ultima spiaggia: definizione

Se sono per il $\boxed{NO}$:

→ spero non sia estendibile alla chiusura

→ spero non sia sublineare (oss: $f(x) = x^2$ su $\mathbb{Z}$ è unif. cont.)

→ uso la def. negata (cioè trovo p.ti arbitrariamente vicini con immagini lontane)

Lipschitzianità

Se sono per il $\boxed{SI}$

→ spero nella limitatezza della derivata, posto che esista

→ spero nella composizione di Lip.

→ definizione

Se sono per il $\boxed{NO}$

→ spero nella non limitatezza della derivata

→ spero nella non unif. continuità

→ uso la definizione negata

$\boxed{\text{Hölderianità}}$

Se sono per il $\boxed{\text{SI}}$

→ spero nella lip.

→ spero nella composizione

→ spero nella lip. di un'opportuna potenza (vedi dopo)

→ uso la def.

Se sono per il $\boxed{\text{NO}}$

→ spero che manchi l'unif. continuità

→ uso la def. negata.

— o — o —

$$\boxed{f \text{ è } \tfrac{1}{2}\text{-Hölder} \iff f^2 \text{ è lip.}}$$

ENTRAMBE LE IMPLICAZIONI SONO FALSE (con ogni α)

Esempio 1 $f(x) = \sqrt{x} + 1$ è $\frac{1}{2}$-Hölder in $[0,1]$, ma

$$f^2(x) = x + 1 + 2\sqrt{x} \quad \text{non è lip. in } [0,1]$$

Quindi $\boxed{\Rightarrow}$ è senza speranze.

Esempio 2 $f(x) = \pm 1$ a caso. Allora $f^2(x)$ è lip. (anzi!) ma f non è nemmeno continua

Proposizione (su un intervallo). Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$.
Supponiamo che
(i) $f(x)$ continua in $[a,b]$
(ii) $f^2(x)$ lip. in $[a,b]$
Allora $f(x)$ è $\frac{1}{2}$-Hölder in $[a,b]$.

$\boxed{\text{Dim.}}$ Pongo $g(x) = f^2(x)$ e quindi per ipotesi

$$|g(y) - g(x)| \leq L\,|y-x| \qquad \forall x \in [a,b]\ \forall y \in [a,b]$$

Ora

$$|f(y)-f(x)| = |\sqrt{g(y)}-\sqrt{g(x)}|$$

$$|\sqrt{A}-\sqrt{B}| \leq \sqrt{|A-B|}$$

$$\leq \sqrt{|g(y)-g(x)|}$$

$$\leq \sqrt{L|y-x|}$$

$$= \sqrt{L}\cdot |y-x|^{1/2}$$

Così non va, perché non ho usato la continuità. Il problema sta nello scrivere $f(x) = \sqrt{g(x)}$, cosa che vale solo se $f(x) \geq 0$.

Per aggiustarlo considero 3 casi

- Se $f(x) \geq 0$ e $f(y) \geq 0$, allora già funziona
- Se $f(x) \leq 0$ e $f(y) \leq 0$, cambiano i segni nel valore assoluto, quindi resta uguale.
- Resta il caso, wlog, in cui $f(x) > 0$ e $f(y) < 0$. Essendo in un intervallo, ed avendo la continuità, so che esiste z tra x e y tale che $f(z) = 0$. A quel p.to concludo spezzando

$$|f(y)-f(x)| \overset{=}{\leq} |f(y)-f(z)| + |f(z)-f(x)|$$

come sopra $\rightarrow$ $\leq \sqrt{L}\,|y-z|^{1/2} + \sqrt{L}\,|z-x|^{1/2}$

$$\leq \sqrt{L}\,|y-x|^{1/2} + \sqrt{L}\,|y-x|^{1/2} = 2\sqrt{L}\,|y-x|^{1/2}$$

$\uparrow$ z è tra x e y.

— o — o —

<u>Oss.</u> Se $\alpha = \frac{1}{n}$ con n dispari non serve la continuità

Oss. Se $f(x)$ è continua in $[a,b]$, allora

$$\boxed{f(x) \text{ è } \alpha\text{-Höld} \iff |f(x)| \text{ è } \alpha\text{-Höld}}$$

stessa dimostrazione con lo 0 in mezzo.

Esempio 1 $f(x) = x \log x$ $\qquad A = (0,1) \qquad B = (1,+\infty)$

In B $f(x)$ non è sublineare, in quanto $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$

quindi NON è unif. continua, dunque nemmeno Höld o Lip.

In A non è Lip. perché $f'(x) = \log x + 1$ non è limitata.

Posso estendere f ad una funzione continua in $[0,1]$, quindi è unif. cont. in $[0,1]$ (l'estensione), quindi $f(x)$ è unif. cont. in $(0,1)$.

È $\frac{1}{2}$-Hölder perché $f^2(x) = x^2 \log^2 x$ è Lip. in $(0,1)$ perché ha derivata

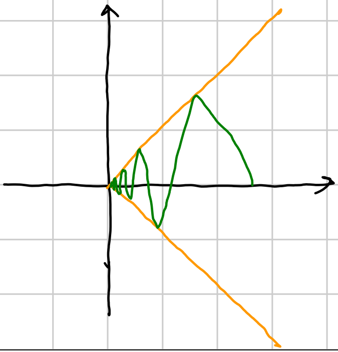
$$2x \log^2 x + 2x^2 \log x \cdot \frac{1}{x}$$

e questa è limitata in $(0,1)$ in quanto la posso estendere e continua applicare W in $[0,1]$

È α-Höld per ogni $\alpha \in (0,1)$ perché $|f(x)|^{\frac{1}{\alpha}}$ è Lip. per ogni $\alpha \in (0,1)$ (derivata limitata).

Esempio 2 $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$ $\qquad A = (0,1)$

Unif. cont. SI: estendo (posso), quindi HC in $[0,1]$



Lip. NO : $f'(x) = \sin\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}x\cos\frac{1}{x}$

$$= \sin\frac{1}{x} - \frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}$$

e questa non è limitata (ma va dimostrato!!!)

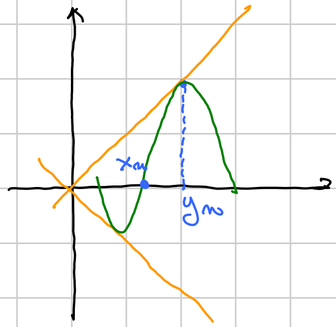
È $\frac{1}{2}$-Hölder in quanto $f^2(x) = x^2\sin^2\frac{1}{x}$ è Lip, perché la sua derivata è

$$2x\sin^2\frac{1}{x} + \cancel{x^2}\cdot 2\sin\frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}\left(-\frac{1}{\cancel{x^2}}\right)$$

e ciò che resta è limitato.
È α-Höld almeno per $\alpha \le \frac{1}{2}$.

Resta da dimostrare che NON è α-Höld per $\alpha > \frac{1}{2}$.
C'è poco da fare: bisogna negare la definizione usando p.ti opportuni.
Vado a supporre che lo sia e scrivo

$$|f(y_n) - f(x_n)| \le H\,|y_n - x_n|^{\alpha} \quad (\alpha > \tfrac{1}{2})$$



Facendo il limite per $n \to +\infty$ trovo un assurdo.

ANALISI 1 — LEZIONE 113

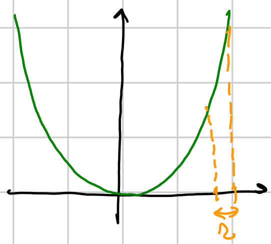
Titolo nota 17/04/2015

MODULO DI CONTINUITÀ Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ e sia $f : A \to \mathbb{R}$.

Def. Si dice modulo di continuità di f in A la funzione
$$\omega : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$$
definita come
$$\boxed{\omega(r) := \sup\{|f(x) - f(y)| : |x-y| \leq r, x \in A, y \in A\}}$$

Brutalmente: il max gap verticale posto che x e y distano meno di r

Oss. La definizione è mal posta, nel senso che il sup può fare $+\infty$ addirittura per ogni $r > 0$: basta pensare a $f(x) = x^2$ con $A = \mathbb{R}$.



Oss. Anche se $f(x)$ è unif. continua in A, può accadere che $\omega(r) = +\infty$ per alcuni valori di $r > 0$.
Esempio: $f(x) = x^2$ con $A = \mathbb{Z}$ è unif. cont. gratis (posso prendere $\delta = \frac{1}{10}$ per ogni $\varepsilon > 0$) però $\omega(r) = +\infty$ per ogni $r \geq 1$.

Oss. $\omega(r)$, come funzione di r, è debolmente crescente per ovvie ragioni.

Prop. Se f è unif. continua in A, allora esiste $r_0 > 0$ tale che
$$\omega(r) < +\infty \qquad \forall r \in (0, r_0)$$

Dim. Uso la def. di uniforme continuità con $\varepsilon = 1$ (o $\varepsilon = 35$).
Trovo un $\delta > 0$ t.c. $|x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$
Quindi $\omega(r) \leq 1$ per ogni $r \in (0, \delta)$.

Oss. Se $f : A \to \mathbb{R}$ e ω è il suo modulo di continuità, allora

$$|f(x) - f(y)| \leq \omega(|x-y|) \qquad \forall x \in A \ \forall y \in A$$

Il modulo di continuità permette di stimare il gap verticale in funzione del gap orizzontale.

Oss. Le funzioni Lip. hanno $\omega(r) \leq L r$, quelle α-Höld hanno $\omega(r) \leq H r^{\alpha}$.

Oss. Sia f una funzione Lip. Voglio approssimare $f(x_0)$ commettendo un certo errore ε. Allora devo approx x_0 con errore $\sim \frac{\varepsilon}{L}$

Se f è $\frac{1}{2}$-Hölder, se voglio ε in arrivo devo avere $\frac{\varepsilon^2}{H^2}$ in partenza

$$\underbrace{|f(x) - f(y)|}_{\varepsilon} \leq H \underbrace{|x-y|^{1/2}}_{\frac{\varepsilon^2}{H^2}}$$

— o — o —

Esercizio Sia $A = [a,b]$, sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua e sia $\omega(r)$ il suo modulo di continuità. Allora

quindi unif. cont.
↑ per HC

1. $\lim_{r \to 0^+} \omega(r) = 0$

2. è subadditivo, cioè
$$\omega(r_1 + r_2) \leq \omega(r_1) + \omega(r_2) \qquad \forall r_1 > 0 \ \forall r_2 > 0$$

$\boxed{\text{Dim 1}}$ Uso la def. di funzione unif. continua.

Dato $\varepsilon > 0$ trovo $\delta > 0$ t.c.

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon \quad \text{se} \quad |x-y| < \delta$$

Questo è come dire che

$$\omega(r) \leq \varepsilon \qquad \text{se} \quad r < \delta$$

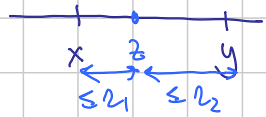
che è quello che serve per dire che $\omega(r) \to 0$ per $r \to 0^+$

$\boxed{\text{Dim 2}}$ (Qui si usa pesantemente l' intervallo)

Prendiamo x e y in $[a,b]$ con $|y-x| \leq r_1+r_2$.

Wlog sia $y \geq x$.

Allora esiste $z \in [x,y]$ tale che



$$|z-x| \leq r_1 \quad \text{e} \quad |y-z| \leq r_2$$

Ora
$$|f(y)-f(x)| \leq |f(y)-f(z)| + |f(z)-f(x)|$$
$$\leq \omega(r_2) + \omega(r_1)$$

Facendo il sup al variare di x e y con $|y-x| \leq r_1+r_2$ ottengo la tesi

— o — o —

<u>Teorema</u> (Integrabilità delle funzioni continue)

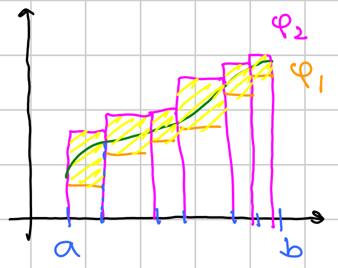
Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua.

Allora f è integrabile in $[a,b]$.

$\boxed{\text{Dim.}}$ Devo dimostrare che per ogni $\varepsilon > 0$ esistono due step function $\varphi_1 : [a,b] \to \mathbb{R}$ e $\varphi_2 : [a,b] \to \mathbb{R}$ tali che

$$\varphi_1(x) \leq f(x) \leq \varphi_2(x) \qquad \forall x \in [a,b]$$

e
$$\int_a^b [\varphi_2(x) - \varphi_1(x)]\,dx \leq \varepsilon$$



Uso la def. di unif. cont. con $\frac{\varepsilon}{b-a}$.

Trovo $\delta > 0$ tale che

$$|f(x) - f(y)| \leq \frac{\varepsilon}{b-a} \quad \text{se} \quad |x-y| \leq \delta$$

Suddivido $[a,b]$ in tutti pezzi di ampiezza $\leq \delta$. In ogni intervallino definisco $\varphi_2(x)$ come il max di $f(x)$ nell' intervallo

e " $\varphi_1(x)$ come il min " " " "

Questo garantisce la $\varphi_1 \leq f \leq \varphi_2$ in $[a,b]$.

In ogni intervallino $\underbrace{\varphi_2(x) - \varphi_1(x)}_{\uparrow} \leq \frac{\varepsilon}{b-a}$

due valori assunti da f nell'intervallo

e quindi

$$\int_a^b [\varphi_2(x) - \varphi_1(x)]\, dx \leq \int_a^b \frac{\varepsilon}{b-a}\, dx = \varepsilon$$

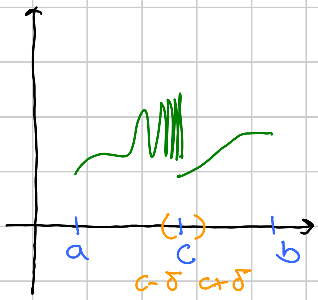
— o — o —

<u>Osservazione</u> Ho dimostrato che <u>qualunque</u> suddivisione con pezzi di ampiezza $\leq \delta$ porta a distanza $\leq \varepsilon$ tra $\int \varphi_1$ e $\int \varphi_2$.

— o — o —

<u>1ª variante</u> Cosa accade se f è limitata in $[a,b]$ e continua in tutti i p.ti meno uno $c \in (a,b)$.

Ce la caviamo lo stesso!



$\boxed{\text{Dim.}}$ Fisso $\varepsilon > 0$. Poiché $f(x)$ è limitata esiste $M \in \mathbb{R}$ t.c.

$$|f(x)| \leq M \qquad \forall x \in [a,b]$$

Costruisco un intervallino intorno a c di ampiezza $\frac{\varepsilon}{6M}$. Sia $[c-\delta, c+\delta]$ questo intervallino.

Tra a e $c-\delta$ la $f(x)$ è continua, quindi posso definire $\varphi_1(x)$ e $\varphi_2(x)$ step function in maniera tale che

$$\int_a^{c-\delta} (\varphi_2 - \varphi_1)\, dx \leq \frac{\varepsilon}{3}$$

Analogamente posso definire φ_1 e φ_2 in $[c+\delta, b]$ in modo che

$$\int_{c+\delta}^b (\varphi_2 - \varphi_1)\, dx \leq \frac{\varepsilon}{3}$$

Nell'intervallo $(c-\delta, c+\delta)$ scelgo $\varphi_2(x) = M$ e $\varphi_1(x) = -M$ e quindi

$$\int_{c-\delta}^{c+\delta} [\varphi_2 - \varphi_1]\, dx = 2M \cdot \text{ampiezza} = 2M \frac{\varepsilon}{6M} = \frac{\varepsilon}{3}$$

Mettendo insieme i 3 pezzi ottengo esatt. ε.

— o — o —

<u>Domanda</u> È vero che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che ogni suddivisione con pezzi di lungh $\leq \delta$ porta a funzioni $\varphi_1(x)$ e $\varphi_2(x)$ con $\int \varphi_2 - \varphi_1 \leq \varepsilon$.

— o — o —

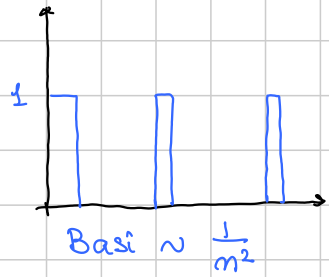
ANALISI 1 — LEZIONE 114

Titolo nota 17/04/2015

Fatto già visto. Supponiamo che $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ converga.

Non è detto che $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

Anche se $f(x)$ è continua posso fare dei triangolini.



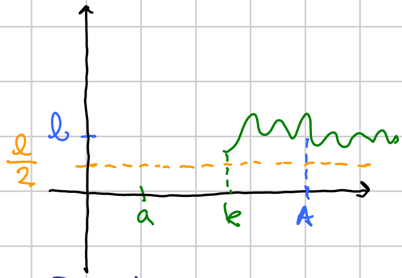
$\boxed{\text{Fatto 1}}$ Sicuramente è vero che

$$\boxed{\liminf_{x\to+\infty} f(x) \le 0 \le \limsup_{x\to+\infty} f(x)}$$

Quindi se il limite esiste è per forza 0

$\boxed{\text{Dim.}}$ Supponiamo per assurdo che

$$\liminf_{x\to+\infty} f(x) = \ell > 0$$



Per caratterizzazione del liminf, esiste $k \in \mathbb{R}$, $k \ge a$ tale che

$$f(x) \ge \frac{\ell}{2} > 0 \quad \forall x \ge k$$

A questo punto

$$\int_a^A f(x)\,dx = \int_a^k f(x) + \int_k^A f(x)\,dx$$

$$\ge \underbrace{\int_a^k f(x)}_{\text{fisso}} + \underbrace{\frac{\ell}{2}(A-k)}_{+\infty \text{ quando } A\to+\infty}$$

Se $\ell = +\infty$, uso 2015 invece di $\frac{\ell}{2}$.

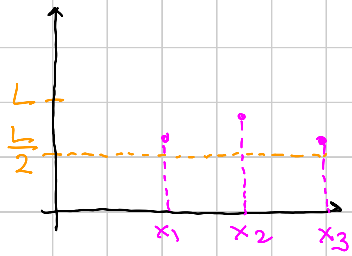
$\boxed{\text{Fatto 2}}$ Se $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ è unif. continua e

$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ converge, allora $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$

Idea brutale: se $f(x)$ ogni tanto è grande, poi ci vuole del tempo a tornare piccola, e nel frattempo l'integrale cresce.

$\boxed{\text{Dim.}}$ Supponiamo per assurdo che il limite non sia 0.
Wlog per il fatto precedente possiamo assumere che sia

$$\limsup_{x \to +\infty} f(x) = L > 0$$



Per caratterizzazione esiste una succ.
$x_n \to +\infty$ tale che

$$f(x_n) \geq \frac{L}{2} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Ora uso la def. di uniforme continuità con $\varepsilon = \frac{L}{4}$.
Ottengo un $\delta > 0$ tale che

$$|y - x| \leq \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon = \frac{L}{4}$$

Quindi nell'intervallo $[x_n, x_n + \delta]$ sarà $f(x) \geq \frac{L}{4}$

Ora
$$\int_{x_n}^{x_n+\delta} f(x)\,dx \geq \delta \cdot \frac{L}{4}$$
$$\parallel$$
$$\int_a^{x_n+\delta} f(x)\,dx - \int_a^{x_n} f(x)\,dx$$
$$\downarrow$$
$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx - \int_a^{+\infty} f(x)\,dx = 0$$

quindi $0 \geq \frac{\delta L}{4}$
assurdo

Fatto generale: se $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ converge e $x_n \to +\infty$, $y_n \to +\infty$,

allora $\int_{x_n}^{y_n} f(x)\,dx \to 0$

Dim. $\int_{x_n}^{y_m} f(x)\,dx = \int_a^{y_m} f(x)\,dx - \int_a^{x_m} f(x)\,dx$

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx - \int_a^{+\infty} f(x)\,dx$$

—— o —— o ——

Esercizio $f(x) = \int_0^x \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\,dt$ per $x>0$

Domanda: è unif. continua?

Intanto non ci sono pbm. di definizione perché $\frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} \sim \frac{1}{\sqrt{t}}$ in 0

$f(x)$ la posso estendere con continuità fino a $t=0$ ponendo $f(0)=0$. Inoltre

grazie a e^{-t}

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\,dt \in \mathbb{R}$$

Continua su semiretta + limite all'infinito reale $\Rightarrow$ unif. cont.

$f'(x) = \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} \Rightarrow f(x)$ è Lip. in $[a,+\infty)$ per ogni $a>0$
non è Lip. in $(0,1)$

Brutal mode: quando $x\to 0$ si ha

$$f(x) \sim \int_0^x \frac{1}{\sqrt{t}}\,dt = 2\sqrt{x}$$

$\Rightarrow$ quindi potrebbe essere $\frac{1}{2}$ - Hölder

Dimostro che è $\frac{1}{2}$- Hölder

$\boxed{\text{Dim 1}}$ Wlog $y \geq x$ e quindi

radice è $\frac{1}{2}$-Höld

$$|f(y) - f(x)| = \int_x^y \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\,dt \underset{e^{-t} \leq 1}{\leq} \int_x^y \frac{1}{\sqrt{t}}\,dt \underset{\text{conto}}{=} 2\left[\sqrt{y} - \sqrt{x}\right] \leq 2\sqrt{y-x}$$

$\boxed{\text{Dim. 2}}$ Almeno nell' intervallo $[0,1]$ posso dim. che $f^2(x)$ è lip.

$$\left[f^2(x)\right]' = 2f(x) \cdot f'(x) = 2 f(x) \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}$$

$$= 2 \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} \int_0^x \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\,dt$$

$$\leq 2 \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} \int_0^x \frac{1}{\sqrt{t}}\,dt$$

$$= 2 \frac{e^{-x}}{\cancel{\sqrt{x}}} \cdot 2\cancel{\sqrt{x}} \leq 4$$

$\Rightarrow f^2(x)$ lip $\Rightarrow f(x)$ $\frac{1}{2}$ - Hölder.

Provo a dimostrare che NON è $\left(\frac{1}{2} + \varepsilon\right)$ - Hölder per ogni $\varepsilon > 0$.
Dimostro che NON è β- Hölder per ogni $\beta > \frac{1}{2}$.

Per assurdo se lo fosse avrei $|f(y) - f(x)| \leq H\,|y-x|^{\beta}$
In particolare con $x = 0$ troverei

$$|f(y)| \leq H\, y^{\beta}, \text{ ma}$$

$$f(y) = \int_0^y \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\,dt \geq \frac{1}{2} \int_0^y \frac{1}{\sqrt{t}}\,dt = \sqrt{y}$$

vale per gli y vicini a 0 quando $e^{-t} \geq \frac{1}{2}$

Mettendo insieme le 2 cose avrei $\sqrt{y} \leq H y^{\beta}$, quindi dividendo

$1 \leq M \cdot y^{\beta - \frac{1}{2}}$. Se $\beta > \frac{1}{2}$ il RHS $\to 0$ per $y \to 0$, da cui $1 \leq 0$ che è assurdo.

— o — o —

ANALISI 1 — LEZIONE 115

Titolo nota 21/04/2015

FUNZIONI CONVESSE

Def. (Insiemi convessi) Un sottoinsieme $A \subseteq \mathbb{R}$ si dice convesso se per ogni $a \in A$ e per ogni $b \in A$, si ha che tutto il segmento di estremi a e b è contenuto in A.

Oss. La definizione si può dare in generale per sottoinsiemi $A \subseteq \mathbb{R}^2$, o $A \subseteq \mathbb{R}^n$

Fatto I sottoinsiemi $A \subseteq \mathbb{R}$ convessi sono solo
- il vuoto
- i p.ti singoli
- gli intervalli (con o senza estremi)
- le semirette (con o senza estremo, destre o sinistre)
- tutto $\mathbb{R}$.

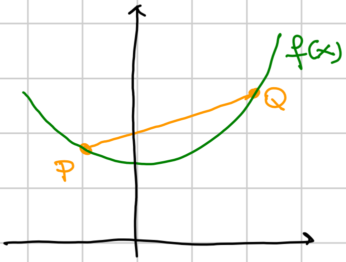
Dim. Esercizio (Hint: prendo $\inf A$ e $\sup A$ e dim. che qualunque cosa in mezzo deve stare in A)

Def. Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ un sottoinsieme convesso, sia $f: A \to \mathbb{R}$. Si dice che f è convessa in A se

$$\boxed{f(\lambda x + (1-\lambda) y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y) \qquad \forall x \in A \quad \forall y \in A \quad \forall \lambda \in [0,1]}$$

Def. ufficiale algebrica

Oss. Geometricamente questo equivale a dire: per ogni coppia di p.ti del grafico P e Q, tutto il segmento PQ sta "sopra" il grafico.



Equivalenza tra le 2 definizioni

Oss. 1 Siano x e y due p.ti di A. Allora $\lambda x + (1-\lambda) y$, con $\lambda \in [0,1]$, rappresenta tutti i p.ti del segmento di estremi x e y. La stessa cosa vale in $\mathbb{R}^n$ se x e y sono vettori

$$\lambda x + (1-\lambda) y = y + \lambda (x-y)$$

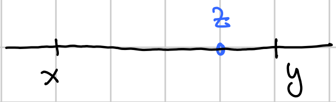
⇝ per $\lambda = 0$ viene y

⇝ per $\lambda = 1$ viene x

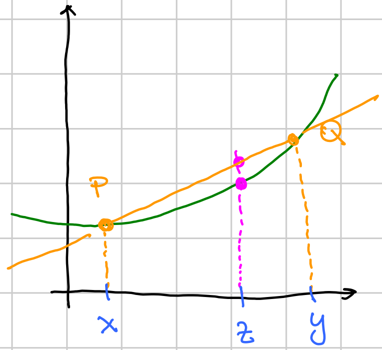
⇝ per $\lambda \in (0,1)$ viene un p.to intermedio

Per dimostrarlo per bene dovrei verificare che
- $\lambda x + (1-\lambda) y$ è sempre compreso tra x e y
- ogni p.to compreso si scrive in questo modo per un opportuno λ.

Fatto importante $\boxed{\lambda = \dfrac{|z-y|}{|x-y|}}$



$$f(\underbrace{\lambda x + (1-\lambda) y}_{z}) \le \underbrace{\lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)}_{r(z)}$$



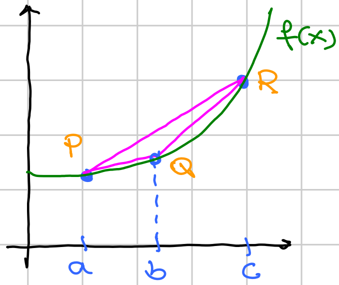
dove $r(z)$ è l'equazione della retta che passa per P e Q

La def. di funzione convessa equivale a dire che

$$f(z) \le \text{retta calcolata in } z$$

— o — o —

Piano: → rapporti tra convessità e continuità
→ rapporti tra " e derivata prima
→ " " " e derivata seconda



<u>Lemma</u> (dei 3 rapporti incrementali)
Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ un insieme convesso, e sia $f: A \to \mathbb{R}$ una funzione convessa.
Sia $a < b < c$ tre elementi di A.
Allora

$$\boxed{\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq \frac{f(c)-f(a)}{c-a} \leq \frac{f(c)-f(b)}{c-b}}$$

coeff. ang. PQ — coeff. ang. PR — coeff. ang. QR

Dim. Posso scrivere $b = \lambda a + (1-\lambda)c$ dove $\lambda = \frac{c-b}{c-a} \in (0,1)$

$$f(b) = f(\lambda a + (1-\lambda)c) \leq \lambda f(a) + (1-\lambda) f(c)$$

Passo 1 Sottraggo $f(c)$ a dx e sx:

$$f(b) - f(c) \leq \lambda\,(f(a) - f(c)) = \underbrace{\frac{c-b}{c-a}}_{\lambda}\,(f(a) - f(c))$$

Se divido per $c-b > 0$ ottengo

$$\frac{f(b)-f(c)}{c-b} \leq \frac{f(a)-f(c)}{c-a}$$

e cambiando i segni

$$\frac{f(c)-f(a)}{c-a} \leq \frac{f(c)-f(b)}{c-b}$$

CHS ≤ RHS

$\boxed{\text{Passo 2}}$ Sottraggo $f(a)$ a dx e sx

$$\begin{aligned} f(b) - f(a) &\leq \lambda f(a) - f(a) + (1-\lambda) f(c) \\ &= (1-\lambda)(f(c) - f(a)) \\ &= \frac{b-a}{c-a}(f(c) - f(a)) \end{aligned} \qquad 1-\lambda = 1 - \frac{c-b}{c-a} = \frac{b-a}{c-a}$$

Dividendo per $b-a > 0$ ottengo

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq \frac{f(c)-f(a)}{c-a}$$

$$\text{LHS} \leq \text{CHS}$$

— o — o —

<u>Notazione</u> Indicando il rapp. increm. con

$$r(x,y) = \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \qquad y > x$$

possiamo rienunciare il lemma come

$$\boxed{r(a,b) \leq r(a,c) \leq r(b,c)} \qquad \forall a < b < c$$

o ancora meglio dicendo che

- fissato y, la funzione $x \to r(x,y)$ è deb. cresc (dx)
- fissato x, la funzione $y \to r(x,y)$ è deb. cres. (sx)

— o — o —

<u>Def.</u> Sia $f: A \to \mathbb{R}$ e sia $x_0 \in \text{Int}(A)$. Definiamo

$$f'_+(x_0) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \qquad \text{(Derivata destra in } x_0)$$

$$f'_-(x_0) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \qquad \text{(Derivata sinistra in } x_0)$$

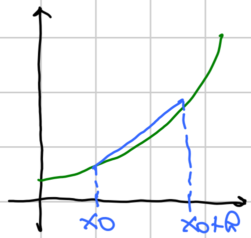
Teorema Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ un insieme convesso e sia $f: A \to \mathbb{R}$. Sia $x_0 \in \mathrm{Int}(A)$. Sia f CONVESSA. Allora

$f'_+(x_0)$ e $f'_-(x_0)$ esistono per forza e

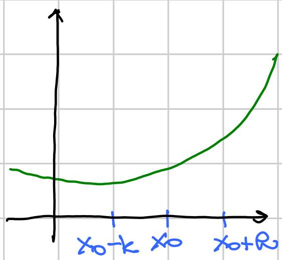
$$\boxed{f'_-(x_0) \leq f'_+(x_0)}$$

Se vale il segno di uguale allora esiste $f'(x_0)$, ed è uguale al valore comune.

Dim. $h > 0$ $\qquad \dfrac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$



il rapporto increm. è una funzione deb. cresc. di h per il lemma dei 3 rapporti e quindi ha limite per $h \to 0^+$.
Idem per $h \to 0^-$ (qui serve la monotonia rispetto alla prima variabile).
Resta da dim. la disuguaglianza.
Per il lemma dei 3 rapporti



$$\frac{f(x_0) - f(x_0-k)}{k} \leq \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

per ogni h e k positivi. Fisso k e faccio $h \to 0^+$. Ottengo

$$\frac{f(x_0) - f(x_0-k)}{k} \leq f'_+(x_0) \qquad \text{(ora so non essere } -\infty)$$

Facendo ora il limite per $k \to 0^+$ ottengo al LHS la der. sx:

$$f'_-(x_0) \leq f'_+(x_0)$$

ora so che non è $+\infty$

Esempio $f(x) = |x|$ $\quad x_0 = 0$

$f'_+(x_0) = 1$

$f'_-(x_0) = -1$.

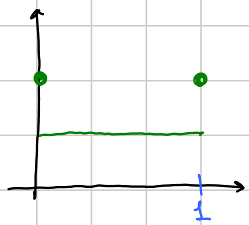
ANALISI 1 – LEZIONE 116

Titolo nota 21/04/2015

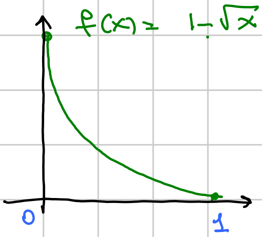
CONVESSITÀ E CONTINUITÀ

① Una funzione convessa, è per forza continua? NO
② Se è continua e convessa, è per forza Lip.? NO

Esempi



convessa in $[0,1]$, ma non continua



$f(x) = 1-\sqrt{x}$ è convessa e cont. in $[0,1]$, ma non Lip.

Teorema 1 Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ convesso, e sia $f: A \to \mathbb{R}$ convessa. Allora $f(x)$ è continua in $\operatorname{Int}(A)$.

$\boxed{\text{Dim.}}$ Prendo $x_0 \in \operatorname{Int}(A)$ e dim. che esiste il limite in x_0.

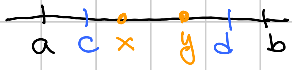
$$f(x) - f(x_0) = \underbrace{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}} \cdot \underbrace{(x-x_0)}$$

Per $x \to x_0^+$ $\qquad f'_+(x_0) \in \mathbb{R} \qquad 0 \qquad = 0$

Per $x \to x_0^-$ $\qquad f'_-(x_0) \in \mathbb{R} \qquad 0 \qquad = 0$

Quindi $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) - f(x_0) = 0$, da cui la continuità

— o — o —



Teorema 2 (Locale lipschitzianità)
Siano $a < c < d < b$ e sia
$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione convessa.
Allora f è lipschitziana in $[c,d]$

$\boxed{\text{Dim.}}$ Prendiamo due p.ti qualunque
$c \leq x < y \leq d$.
Allora

$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x} = r(x,y) \underset{\substack{\text{Monot.} \\ 2^a \text{ variabile}}}{\leq} r(x,b) \underset{\substack{\text{Monot.} \\ 1^a \text{ variabile}}}{\leq} r(d,b)$$

$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x} = r(x,y) \geq r(a,y) \geq r(a,c)$$

I due estremi non dipendono da x e y. Quindi

$$r(a,c) \leq \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leq r(d,b)$$

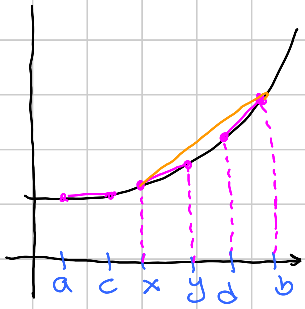
Fatto generale: se $A \leq X \leq B$, allora $|X| \leq \max\{|A|, |B|\}$
(si dimostra distinguendo i casi $X \geq 0$ e $X \leq 0$: precorso!)
Ma allora

$$\frac{|f(y)-f(x)|}{|y-x|} \leq \max\{|r(d,b)|, |r(a,c)|\} =: L$$

e questo dice che $f(x)$ è Lip. in $[c,d]$

— o — o —

<u>Oss.</u> In pratica sto dicendo che
il rapporto incrementale tra x e y
si controlla con quelli
- tra a e c
- tra d e b.



— o — o —

CONVESSITÀ E DERIVATA PRIMA

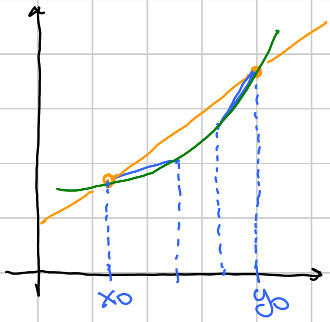
① Una funzione convessa può non essere derivabile in alcuni p.ti
$f(x) = |x|$

② Una funzione convessa ammette sempre derivata dx e sx nei p.ti $x_0 \in \mathrm{Int}(A)$ (sul bordo non è detto)

Teorema (Monotonia delle derivate destra e sinistra)
Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ convesso e sia $f: A \to \mathbb{R}$ convessa.
Siano $x_0 \in \mathrm{Int}(A)$ e $y_0 \in \mathrm{Int}(A)$ con $x_0 < y_0$.
Allora

$$f'_-(x_0) \le f'_+(x_0) \le f'_-(y_0) \le f'_+(y_0)$$

Dim. Tanto per cambiare, è il lemma dei 3 rapporti incrementali



Per h positivo piccolo

$$r(x_0, x_0+h) \le r(x_0, y_0)$$

quindi

$$f'_+(x_0) \le r(x_0, y_0)$$

Analogamente per h positivo piccolo

$$r(x_0, y_0) \le r(y_0-h, y_0)$$
$$\downarrow \qquad \qquad \downarrow$$
$$r(x_0, y_0) \le f'_-(y_0)$$

Di conseguenza ho ottenuto che

$$\boxed{f'_+(x_0) \le r(x_0, y_0) \le f'_-(y_0)}$$

<u>Corollario</u> Supponiamo che f sia derivabile in A.
Allora

$$\boxed{f \text{ è convessa} \iff f'(x) \text{ è debolmente crescente}}$$

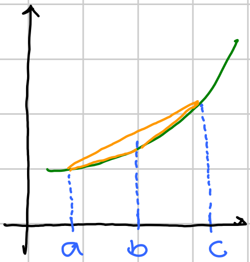
Dim. $\boxed{\Rightarrow}$ Teorema precedente visto che $f' = f'_+ = f'_-$

Aggiunto dopo VIDEO: RIFATTA MEGLIO ALLA LEZIONE 118

$\boxed{\Leftarrow}$ Dalla monotonia della derivata segue il lemma dei 3 rapporti incrementali, o per lo meno segue il confronto

$$r(a,b) \leq r(b,c)$$

perché sono derivate in p.ti intermedi (via Lagrange)



$$f(b) = f(a) + \int_a^b f'(x)\,dx$$

$$f(c) = f(a) + \int_a^c f'(x)\,dx = f(a) + \int_a^b f'(x)\,dx + \int_b^c f'(x)\,dx$$

Devo dimostrare che

$$f(b) \leq \lambda f(a) + (1-\lambda) f(c)$$

$$= \frac{c-b}{c-a} f(a) + \frac{b-a}{c-a} f(c)$$

Sostituendo $\quad f(a) + \int_a^b \ldots \leq \frac{c-b}{c-a} f(a) + \frac{b-a}{c-a}\left(f(a) + \int_a^b + \int_b^c\right)$

Semplifico e se ne va $f(a)$ e resta

$$\int_a^b f'(x)dx \leq \frac{b-a}{c-a}\int_a^b f'(x)dx + \frac{b-a}{c-a}\int_b^c f'(x)dx$$

$$\left(1 - \frac{b-a}{c-a}\right)\int_a^b f'(x)\,dx \leq \frac{b-a}{c-a}\int_b^c f'(x)\,dx$$

$$\frac{c-b}{\cancel{c-a}}\int_a^b f'(x)\,dx \leq \frac{b-a}{\cancel{c-a}}\int_b^c f'(x)\,dx$$

$$\underbrace{\frac{1}{b-a}\int_a^b f'(x)\,dx}_{\text{valore di } f'(x) \text{ in un p.to tra a e b}} \leq \underbrace{\frac{1}{c-b}\int_b^c f'(x)\,dx}_{\text{valore di } f'(x) \text{ in un p.to tra b e c}}$$

— o — o —

FINE PARTE RIFATTA MEGLIO (?) ALLA LEZIONE 118

Moralmente le funzioni convesse stanno sopra la retta tangente.

Teorema Sia A convesso, sia $f: A \to \mathbb{R}$ convessa. Sia $x_0 \in \operatorname{Int}(A)$ e sia $m \in [f'_-(x_0), f'_+(x_0)]$. Allora

$$f(x) \geq \underbrace{f(x_0) + m(x - x_0)}_{\text{retta per } (x_0, f(x_0)) \text{ con coeff. ang. } m} \qquad \forall x \in A$$

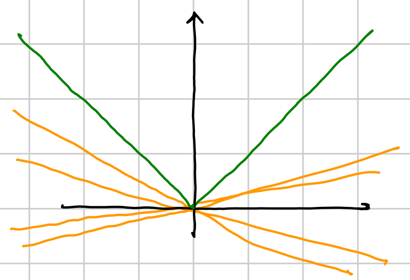
$\boxed{\text{Dim.}}$ Solito lemma. Se $x > x_0$ devo dim. che

$$\underbrace{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}_{r(x_0, x)\ \geq\ f'_+(x_0)\ \geq\ m} \geq m$$

Se $x < x_0$, devo dim. che $\underbrace{\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}_{r(x, x_0)\ \leq\ f'_-(x_0)\ \leq\ m} \leq m$

— o —

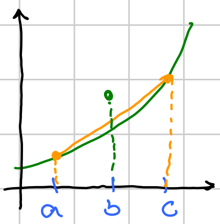
Disegno



ANALISI 1 — LEZIONE 117

Titolo nota 21/04/2015

Nuova dim. che $f'(x)$ esiste ed è debolmente crescente implica $f(x)$ convessa.



Dati comunque $a<b<c$ devo dimostrare che

$$f(b) \leq \text{retta}.$$

Se per assurdo fosse $f(b) > \text{retta}$, allora avremmo che

$$r(b,a) > r(c,a) > r(c,b)$$

Tuttavia dalla crescenza della derivata abbiamo dedotto che

$$r(b,a) \leq r(c,b).$$

Questa non usa gli integrali, anche perché abbiamo dimostrato il teo. fond. del calcolo integrale assumendo la cont. della derivata, che qui NON è un'ipotesi.

— o — o —

<u>Esercizio</u> Sia $f: A \to \mathbb{R}$ convessa, e sia x_0 un p.to in cui $f'_+(x)$ è continua.

Allora $f'(x_0)$ esiste.

$\boxed{\text{Dim.}}$ Devo dimostrare che $f'_-(x_0) = f'_+(x_0)$. Intanto so che è $\leq$ sempre per un fatto generale.

Per un teo. precedente sappiamo che

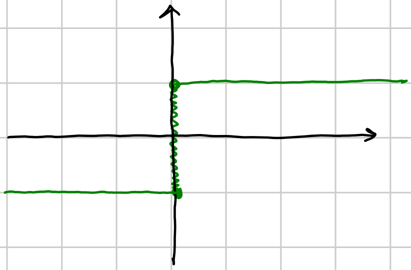
$$f'_+(x_0-h) \leq f'_-(x_0)$$

Facendo il limite per $h \to 0^+$ ottengo la tesi $f'_+(x_0) \leq f'_-(x_0)$.

Qui ho usato la continuità di f'_+ in (x_0)

— o — o —

Grafici monotoni Posso pensare la "derivata" di $|x|$ come



In $x=0$ ha senso dire che la derivata sono tutti gli $m \in [-1,1]$ perché sono tutti i possibili coeff. angolari di rette che stanno sotto il grafico.

— o — o —

FUNZIONI STRETTAMENTE CONVESSE

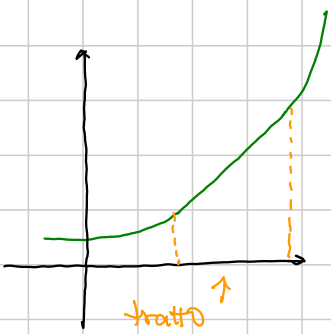
$$f(\lambda x + (1-\lambda) y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$$

Casi banali in cui vale l'uguale:

- $x = y$ (PQ degenera a un p.to)
- $\lambda = 0$ oppure $\lambda = 1$ (estremi P e Q)

Def. Una funzione si dice strettamente convessa se è convessa e gli unici casi di uguaglianza sono quelli banali (cioè il segmento PQ sta "veramente" sopra il grafico)

Oss. In termini di grafico vuol dire che c'è un tratto rettilineo, non necessariamente parallelo all'asse x.



Teorema Supponiamo che $f'(x)$ esista in A.

Allora

$$\boxed{f \text{ è strett. convessa} \iff f' \text{ è strett. crescente}}$$

Idea della dim. Come prima, solo osservando che

stretta convessità $\Leftrightarrow$ disug. strette nel lemma dei 3 rapporti incrementati

— o — o —

CONVESSITÀ E DERIVATA SECONDA

Le funzioni convesse non sono obbligate ad avere derivata seconda. Se ce l'hanno, allora è una questione di segno.

Teorema Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ convesso e sia $f: A \to \mathbb{R}$. Supponiamo che $f''(x)$ esista per ogni $x \in \text{Int}(A)$. Allora

$$\boxed{f \text{ convessa in } A \iff f''(x) \geq 0 \text{ per ogni } x \in \text{Int}(A)}$$

$$\boxed{f \text{ strett. conv. in } A \overset{\Leftarrow}{\not\Rightarrow} f''(x) > 0 \text{ per ogni } x \in \text{Int}(A)}$$

C'è anche: $f''(x) \geq 0$ per ogni $x \in \text{Int}(A)$ e annullamento sporadico (cioè $f''(x)$ non si annulla in un intero intervallo) $\Rightarrow$ f strett. conv. in A.

— o — o —

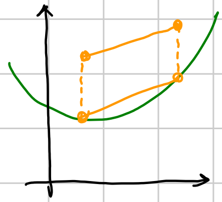
SOPRAGRAFICI Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ qualunque. Sia $f: A \to \mathbb{R}$ una funzione.

Si dice sopragrafico di f l'insieme

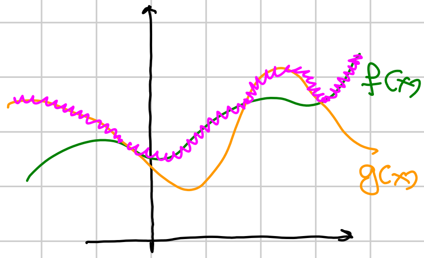
$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq f(x)\} \subseteq \mathbb{R}^2$$

Analogamente posso definire il sottografico.

Oss. Una funzione è convessa $\Leftrightarrow$ il sopragrafico è convesso



Esercizio Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ convesso, e siano $f : A \to \mathbb{R}$ e $g : A \to \mathbb{R}$ due funzioni convesse.
Allora
$$h(x) := \max\{f(x), g(x)\}$$
è convessa.



$\boxed{\text{Dim 1}}$

Step 1 Il sopragrafico di $h(x)$ è l'intersezione dei sopragrafici, che sono convessi

Step 2 L'intersezione di due insiemi convessi è a sua volta convessa

$\boxed{\text{Dim. 2}}$ Per via algebrica. Prendiamo $a < b < c$ $\quad b = \lambda a + (1-\lambda) c$
e voglio dim. che
$$h(b) \leq \lambda h(a) + (1-\lambda) h(c)$$
Ci sono 2 casi.

- Se $h(b) = f(b)$, allora

$$h(b) = f(b) \overset{f \text{ è conv.}}{\leq} \lambda f(a) + (1-\lambda) f(c)$$
$$\underset{f \leq h \ + \text{ coeff. positivi}}{\leq} \lambda h(a) + (1-\lambda) h(c)$$

- Se $h(b) = g(b)$, allora stessa con $g(b)$ invece di $f(b)$

— o — o —

Conseguenza: $|x| = \max\{x, -x\}$ è convessa.

Formula utile per il futuro: $\boxed{\max\{a, b\} = \dfrac{a+b+|a-b|}{2}}$

ANALISI 1 — LEZIONE 118

Titolo nota 22/04/2015

<u>Convesse e continuità</u> Se $f : A \to \mathbb{R}$ è convessa, allora

1. f è continua in $\mathrm{Int}(A)$
2. f è Lip. in tutti gli intervalli lontani dal bordo di A

<u>Convesse e derivabilità</u> Se $f : A \to \mathbb{R}$ è convessa, allora

1. in ogni $x_0 \in \mathrm{Int}(A)$ esistono $f'_-(x_0)$ e $f'_+(x_0)$ con $f'_-(x_0) \leq f'_+(x_0)$
2. $x \to f'_-(x)$ e $x \to f'_+(x)$ sono debolmente crescenti, anzi
$$f'_+(x_0) \leq f'_-(x_1) \quad \text{per ogni } \underbrace{x_0 \leq x_1}_{\in \mathrm{Int}(A)}$$
3. nei p.ti in cui $f'_-(x)$ è continua, allora esiste veramente $f'(x)$
   " $f'_+(x)$ " "
4. $f(x)$ sta sopra la retta tangente, o meglio
$$f(x) \geq f(x_0) + m(x - x_0) \qquad \forall x \in A$$
$$m \in [f'_-(x_0), f'_+(x_0)]$$
5. $\boxed{\text{Supponendo}}$ $f'(x)$ esiste in ogni $x \in \mathrm{Int}(A)$, allora

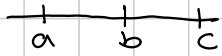
$$\boxed{\begin{array}{ll} f \text{ convessa in } A & \Longleftrightarrow f'(x) \text{ deb. cresc. in } A \text{ (in Int}(A)) \\[2ex] f \text{ strett. conv. in } A & \Longleftrightarrow f'(x) \text{ strett. cresc. in Int}(A) \end{array}}$$

<u>Convesse e derivata seconda</u> Supponendo che $f''(x)$ esista in ogni $x \in \mathrm{Int}(A)$, allora

1. f conv. in $A \Longleftrightarrow f''(x) \geq 0$ per ogni $x \in \mathrm{Int}(A)$
2. $f''(x) > 0$ in $\mathrm{Int}(A) \Longrightarrow f$ strett. conv.
3. $f''(x) \geq 0$ in $\mathrm{Int}(A)$ e non esiste nessun intervallo in cui $f''(x) = 0 \Longrightarrow f$ strett. conv.

<u>Lemma dei tre rapporti incrementali</u> Se $A \subseteq \mathbb{R}$ è convesso e $f: A \to \mathbb{R}$ è convessa, allora

$$R(a,b) \leq R(a,c) \leq R(b,c) \qquad \forall \underbrace{a<b<c}_{\in A}$$



<u>Oss.</u> Il lemma implica in particolare che $R(a,b) \leq R(b,c)$

<u>Lemma inverso</u> Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ è convesso e sia $f: A \to \mathbb{R}$. Supponiamo che

$$R(a,b) \leq R(b,c) \qquad \forall \underbrace{a<b<c}_{\in A}$$

Allora $f(x)$ è convessa in A

$\boxed{\text{Dim.}}$ Devo dim. che

$$f(\underbrace{\lambda x + (1-\lambda) y}_{b}) \leq \lambda f(\underset{\uparrow \atop a}{x}) + (1-\lambda) f(\underset{\uparrow \atop c}{y})$$

Per ipotesi

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq \frac{f(c)-f(b)}{c-b}$$

Moltiplico

$$(c-b)(f(b)-f(a)) \leq (b-a)(f(c)-f(b))$$

riorganizzo

$$(c-a) f(b) \leq (c-b) f(a) + (b-a) f(c)$$

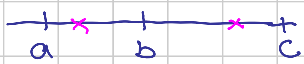
Divido

$$f(b) \leq \underbrace{\frac{c-b}{c-a}}_{\lambda} f(a) + \underbrace{\frac{b-a}{c-a}}_{1-\lambda} f(c)$$

— o — o —

$\boxed{\text{Dim. che } f'(x) \text{ esiste deb. cresc.} \Rightarrow f(x) \text{ convessa}}$

$$f'(x) \text{ deb. cres.} \Rightarrow \underset{\uparrow \atop {f' \text{ in un} \atop \text{pto fra } a \text{ e } b}}{R(a,b)} \leq \underset{\uparrow \atop {f' \text{ in un pto} \atop \text{fra } b \text{ e } c}}{R(b,c)} \qquad \forall a<b<c \Rightarrow \text{conv.}$$



— o — o —

DISUGUAGLIANZA DI JENSEN

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ un insieme convesso, e sia $f: A \to \mathbb{R}$ convessa.
Sia $n \geq 2$ un intero, siano $x_1, \dots, x_n$ p.ti di A (non nec. distinti), siano $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ numeri reali ≥ 0 tali che

$$\lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1 \qquad (\text{quindi } \lambda_i \in [0,1])$$

Allora

$$\boxed{f(\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n) \leq \lambda_1 f(x_1) + \dots + \lambda_n f(x_n)}$$

Disug. di Jensen

Dim. Per induzione.

Passo base $n = 2$

$$f(\underset{\lambda}{\lambda_1}\underset{x}{x_1} + \underset{(1-\lambda)}{\lambda_2}\underset{y}{x_2}) \leq \underset{\lambda}{\lambda_1} f(x_1) + \underset{(1-\lambda)}{\lambda_2} f(x_2)$$

$$\lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$$

Vero per definizione di funzione convessa

Passo induttivo Assumo per ipotesi che valga con n e dimostro per $n+1$.

Prendo $x_1, x_2, \dots, x_{n+1}$ e prendo $\lambda_1 + \dots + \lambda_n + \lambda_{n+1} = 1$.
Almeno uno dei λ_i è $\neq 1$, wlog sia λ_{n+1}. Allora

$$\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n + \lambda_{n+1} x_{n+1} =$$

$$= (1-\lambda_{n+1}) \frac{\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n}{1-\lambda_{n+1}} + \lambda_{n+1} x_{n+1}$$

$$f(\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_{n+1} x_{n+1}) = f\Big(\underset{(1-\lambda)}{(1-\lambda_{n+1})} \underset{y}{\frac{\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n}{1-\lambda_{n+1}}} + \underset{\lambda}{\lambda_{n+1}} \underset{x}{x_{n+1}}\Big)$$

$$\leq \lambda_{n+1} f(x_{n+1}) + (1-\lambda_{n+1}) f\Big(\underbrace{\frac{\lambda_1}{1-\lambda_{n+1}} x_1 + \dots + \frac{\lambda_n}{1-\lambda_{n+1}} x_n}_{n \text{ termini}}\Big)$$

Nell'ultima f ho la somma di n termini i cui coeff. hanno somma

$$\frac{\lambda_1 + \dots + \lambda_n}{1-\lambda_{n+1}} = \frac{1-\lambda_{n+1}}{1-\lambda_{n+1}} = 1$$

Quindi per ipotesi induttiva ottengo

$$\leq \lambda_{n+1} f(x_{n+1}) + (1-\lambda_{n+1})\left[\frac{\lambda_1}{1-\lambda_{n+1}} f(x_1) + \dots + \frac{\lambda_n}{1-\lambda_{n+1}} f(x_n)\right]$$

Semplificando ho la tesi.

— o — o —

Oss. Un caso particolare è quello con $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = \frac{1}{n}$ in cui diventa

$$f\left(\frac{x_1 + \dots + x_n}{n}\right) \leq \frac{f(x_1) + \dots + f(x_n)}{n}$$

Dimostrarla direttamente per induzione è faticoso.

— o — o —

Disuguaglianze di convessità

① Jensen
② funzione ≥ retta tangente

— o —

Def. Una funzione $f : \underset{\uparrow \text{ convesso}}{A} \to \mathbb{R}$ si dice concava se

– f è convessa. Questo equivale a girare la diseg. nella definizione, cioè

$$f(\lambda x + (1-\lambda) y) \geq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$$

Tutti gli enunciati per le convesse hanno un analogo per le concave.

— o — o —

$\boxed{\text{Fatto 1}}$ Sia $x_0 \in \text{Int}(A)$ un p.to tale che
$0 \in [f'_-(x_0), f'_+(x_0)]$ cioè $f'_-(x_0) \leq 0 \leq f'_+(x_0)$
Allora x_0 è un p.to di minimo globale.

$\boxed{\text{Dim.}}$ $f(x) \geq f(x_0) + m(x-x_0) \quad \forall x \in A$
vale per ogni $m \in [f'_-(x_0), f'_+(x_0)]$

Se scelgo $m=0$ ottengo
$$f(x) \geq f(x_0) \qquad \forall x \in A$$

$\boxed{\text{Fatto 2}}$ Se f è C^2, star sopra la retta tangente è una conseguenza di Taylor-Lagrange

$$f(x) = \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)}_{\text{retta tang.}} + \frac{1}{2}\underbrace{f''(c)}_{\geq 0}\underbrace{(x-x_0)^2}_{\geq 0}$$

$\boxed{\text{Fatto 3}}$ BERNOULLI GENERALIZZATA

Bernoulli classica: $(1+x)^n \geq 1+nx \qquad \forall x > -1, \forall n \in \mathbb{N}$

" generale: $(1+x)^\alpha \geq 1+\alpha x \qquad \forall x > -1, \forall \alpha \geq 1$

$\boxed{\text{Dim.}}$ Prendo $f(x) = (1+x)^\alpha$. Si dimostra che per $\alpha \geq 1$
$f(x)$ è convessa per $x > -1$
$$f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1} \qquad f''(x) = \underbrace{\alpha(\alpha-1)}_{>0}\underbrace{(1+x)^{\alpha-2}}_{>0}$$

$$\underbrace{(1+x)^\alpha}_{f(x)} \geq \underbrace{1+\alpha x}_{\substack{\text{retta tangente in } x=0 \\ f(0)+f'(0)x}}$$

Oss. La Bernoulli classica con n pari vale per ogni $x \in \mathbb{R}$.
Motivo: $f(x) = (1+x)^n$ è convessa su tutto $\mathbb{R}$ per n pari.

— o — o —

ANALISI 1 – LEZIONE 119

Titolo nota 22/04/2015

Disuguaglianze classiche di convessità

MEDIA ARITMETICA / MEDIA QUADRATICA

$$\frac{x_1+\ldots+x_n}{n} \leq \sqrt{\frac{x_1^2+\ldots+x_n^2}{n}} \qquad \forall\, x_1,\ldots,x_n \in \mathbb{R}$$

Dim. $$\left(\frac{x_1+\ldots+x_n}{n}\right)^2 \leq \frac{x_1^2+\ldots+x_n^2}{n}$$

$$f\left(\frac{x_1+\ldots+x_n}{n}\right) \leq \frac{f(x_1)+\ldots+f(x_n)}{n}$$

con $f(x) = x^2$ che è convessa su tutto $\mathbb{R}$.

Dim 2 La posso riscrivere come

$$\underbrace{x_1+\ldots+x_n}_{\langle X, Y\rangle} \leq \sqrt{n}\cdot\sqrt{x_1^2+\ldots+x_n^2}$$

$$\langle X, Y \rangle \leq \|Y\|\cdot\|X\| \quad \text{Cauchy-Schwarz.}$$

$X = (x_1, \ldots, x_n) \qquad Y = (1, \ldots, 1)$

— o — o —

MEDIA ARITMETICA VS MEDIA p-esima con $p \geq 1$

$$\frac{x_1+\ldots+x_n}{n} \leq \left[\frac{x_1^p+\ldots+x_n^p}{n}\right]^{1/p} \qquad \forall\, x_1,\ldots,x_n \geq 0$$

Dim. Jensen applicato a $f(x) = x^p$ che per $p \geq 1$ (reale) è convessa per $x \geq 0$

$\boxed{\text{CONFRONTO TRA 2 MEDIE } p\text{-ESIME}}$ Se $p \leq q$, allora

$$\left[\frac{x_1^p + \dots + x_n^p}{n}\right]^{1/p} \leq \left[\frac{x_1^q + \dots + x_n^q}{n}\right]^{1/q} \quad \forall\, x_1, \dots, x_n \geq 0$$

$\boxed{\text{Dim.}}$ Elevo tutto alla q

$$\left[\frac{x_1^p + \dots + x_n^p}{n}\right]^{q/p} \leq \frac{x_1^q + \dots + x_n^q}{n}$$

Ora uso Jensen con $f(x) = x^{q/p}$ (che ha esponente ≥ 1)

$$\left[\frac{y_1 + \dots + y_n}{n}\right]^{q/p} \leq \frac{y_1^{q/p} + \dots + y_n^{q/p}}{n}$$

Ora la applico con $y_i = x_i^p$

— o — o —

Esercizio

$$\lim_{p \to +\infty} \left(\frac{x_1^p + \dots + x_n^p}{n}\right)^{1/p} = \operatorname{Max}\{x_1, \dots, x_n\}$$

$\boxed{\text{Sol.}}$ Wlog sia x_1 il max. Lo raccolgo

$$\left[\frac{x_1^p + \dots + x_n^p}{n}\right]^{1/p} = \underbrace{[x_1^p]^{1/p}}_{\downarrow\; x_1} \underbrace{\boxed{\left[\frac{1 + \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^p + \dots + \left(\frac{x_n}{x_1}\right)^p}{n}\right]^{1/p}}}_{\downarrow\; 1}$$

$$\underbrace{\left[\frac{1}{n}\right]^{1/p}}_{\downarrow\; 1} \leq \underbrace{\left[\dots\right]^{1/p}}_{\downarrow\; 1} \leq \underbrace{1}_{\downarrow\; 1}$$

$\boxed{\text{MEDIA ARITMETICA VS MEDIA GEOMETRICA}}$

$$\underbrace{\sqrt[n]{x_1 \cdot \ldots \cdot x_n}}_{\text{geometrica}} \leq \underbrace{\frac{x_1 + \ldots + x_n}{n}}_{\text{aritmetica}} \qquad \forall\, x_1, \ldots, x_n > 0$$

$\boxed{\text{Dim}}$ Faccio log a dx e sx e ottengo (log è crescente)

$$\frac{\log x_1 + \ldots + \log x_n}{n} \leq \log\left(\frac{x_1 + \ldots + x_n}{n}\right)$$

"Jensen al contrario" per la funzione $f(x) = \log x$ che infatti è concava per $x > 0$ (dim: $f''(x) < 0$ per $x > 0$)

— o — o —

Media geom. vs media p-esima con $p > 0$: stesso trucco di prima.

— o — o —

$\boxed{\text{DISUG. DI YOUNG A 2 termini}}$

$$\boxed{ab \leq \frac{1}{p} a^p + \frac{1}{q} b^q} \qquad \forall a > 0 \quad \forall b > 0 \qquad \forall\ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

Caso particolare: $ab \leq \frac{1}{2} a^2 + \frac{1}{2} b^3$

$\boxed{\text{Dim}}$ Faccio log a dx e sx:

$$\log a + \log b \leq \log\left(\frac{1}{p} a^p + \frac{1}{q} b^q\right)$$

Poichè $\log x$ è concava:

$$\underbrace{\lambda \log A + (1-\lambda) \log B}_{\log a \;+\; \log b} \leq \log\big(\underbrace{\lambda A + (1-\lambda) B}_{(\frac{1}{p} a^p + \frac{1}{q} b^q)}\big)$$

$A = a^p$, $B = b^p$, $\lambda = \frac{1}{p}$, $1-\lambda = \frac{1}{q}$

$\boxed{\text{YOUNG A 3}}$ $\quad abc \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q + \frac{1}{r}c^r \qquad \frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}=1$

$\boxed{\text{Dim.}}$ Ci si riduce a $\log a + \log b + \log c \leq \log(\text{RHS})$

$$\lambda_1 \log A + \lambda_2 \log B + \lambda_3 \log C \leq \log(\lambda_1 A + \lambda_2 B + \lambda_3 C)$$

Uso $A = a^p$, $B = b^q$, $C = c^r$, $\lambda_1 = \frac{1}{p}$, $\lambda_2 = \frac{1}{q}$, $\lambda_3 = \frac{1}{r}$

$\boxed{\text{CAUCHY-SCHWARZ A 3}}$

$$\sum a_i b_i \leq \left(\sum a_i^2\right)^{1/2}\left(\sum b_i^2\right)^{1/2} \qquad \text{(a 2 specie)}$$

$$\sum a_i b_i c_i \leq \left(\sum a_i^p\right)^{1/p}\left(\sum b_i^q\right)^{\frac{1}{q}}\left(\sum c_i^r\right)^{\frac{1}{r}} \qquad a_i, b_i, c_i \geq 0$$

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}=1$$

$\boxed{\text{Idea della dim}}$

$\boxed{\text{Step 1}}$ Osservo che LHS e RHS sono omogenei, cioè se moltiplico tutti gli a_i per un certo λ non cambia niente. Idem per i b_i ed i c_i.
Quindi wlog posso assumere che i 3 fattori al RHS siano uguali ad 1

$\boxed{\text{Step 2}}$ Uso la Young a 3 sui termini del LHS

$$\sum a_i b_i c_i \leq \sum \frac{1}{p}a_i^p + \frac{1}{q}b_i^q + \frac{1}{r}c_i^r$$

$$= \frac{1}{p}\underbrace{\sum a_i^p}_{=1} + \frac{1}{q}\underbrace{\sum b_i^q}_{=1} + \frac{1}{r}\underbrace{\sum c_i^r}_{=1}$$

$$= \frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}=1.$$

—o—o—

Algebra delle convesse

1. Somma di convesse è convessa
2. Convessa · costante positiva = convessa
3. Convessa · costante negativa = concava
4. Prodotto di 2 convesse ? In generale va male

$f(x) = x^2 - 1$ è convessa, ma $(x^2-1)^2$ non lo è (si vede perché si annulla in ± 1 e non è ≤ 0 in mezzo)

Brutal mode $\quad (f(x) \cdot g(x))'' = (f'g + fg')'$

$$= f''g + 2f'g' + fg''$$

Forse vero: se f e g sono
- → convesse
- → positive ≥ 0
- → monotone nello stesso verso

allora $f(x) \cdot g(x)$ è convessa

$\boxed{\text{Dim.}}$

$$f(\lambda x + (1-\lambda) y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$$

$$g(\underbrace{\lambda x + (1-\lambda) y}_{z}) \leq \lambda g(x) + (1-\lambda) g(y)$$

Moltiplico (e posso)

$$f(z) g(z) \leq \lambda^2 f(x) g(x) + (1-\lambda)^2 f(y) g(y) +$$

$$+ \lambda(1-\lambda) f(x) g(y) + \lambda (1-\lambda) f(y) g(x)$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{speranza}}}{\leq} \lambda f(x) g(x) + (1-\lambda) f(y) g(y)$$

Controllo la speranza: viene $\underbrace{\lambda(1-\lambda)}_{\geq 0} \underbrace{(f(x) - f(y))(g(x) - g(y))}_{\text{hanno lo stesso segno se monotone dalla stessa parte.}} \geq 0$

— o — o —

ANALISI 1 - LEZIONE 120

Titolo nota 24/04/2015

$\boxed{\text{FUNZIONE INVERSA}}$ Siano $A \subseteq \mathbb{R}$ e $B \subseteq \mathbb{R}$ due sottoinsiemi.
Sia $f: A \to B$ una funzione iniettiva e surgettiva.
Allora f è invertibile, cioè esiste $g: B \to A$ tale che

$$f(g(b)) = b \qquad \forall b \in B$$
$$g(f(a)) = a \qquad \forall a \in A$$

Domande:

① se f è monotona, g è monotona?

② Se f è continua, g è continua?

③ Se f è derivabile in $x_0 \in \operatorname{Int}(A)$, g è derivabile in $f(x_0)$?

④ Se f è C^1 in A, g è C^1 in B?

⑤ Se f è C^k in A, g è C^k in B?

Risposta ① Se f è monotona e invertibile, allora f e g sono strettamente monotone (nello stesso verso)

$\boxed{\text{Dim}}$ Supponiamo f debolmente crescente (se è decrescente, il discorso è analogo).

→ Dimostro che è strett. cresc. Se per assurdo non lo fosse, esisterebbero $a_1 < a_2$ in A t.c. $f(a_1) = f(a_2)$, quindi addio iniettività.

→ Dimostro che g è strett. cresc. Prendo $b_1 < b_2$ in B e mostro che $g(b_1) < g(b_2)$. Se per assurdo non fosse così, avrei che

$$g(b_1) \geq g(b_2)$$

Applico f a dx e sx e usando la monot. di f:

$$\begin{array}{ccc} f(g(b_1)) & \geq & f(g(b_2)) \\ \| & & \| \\ b_1 & \geq & b_2 \end{array}$$

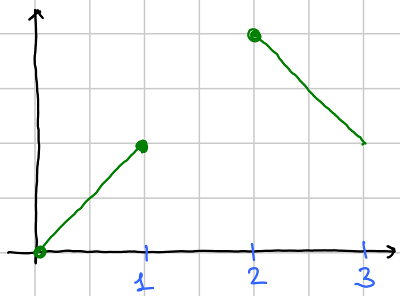
← def. funzione inversa

che è assurdo.

— o — o —

Risposta 2   NO : ci sono funzioni continue la cui inversa pur esistendo non è continua

Esempio



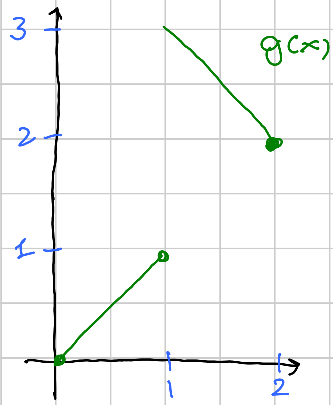
$A = [0,1] \cup [2,3)$

$B = [0,2]$

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \in [0,1] \\ 4-x & \text{se } x \in [2,3) \end{cases}$$

Iniettività e surg. si verificano (basta intersecare il grafico con tutte le rette $y = \lambda$ con $\lambda \in [0,2]$ e verificare che esiste un'unica intersezione).

L'inversa è $g : [0,2] \to [0,1] \cup [2,3)$ ha il grafico in figura, quindi non è continua in $x = 2$.

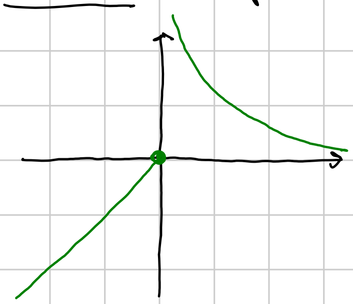


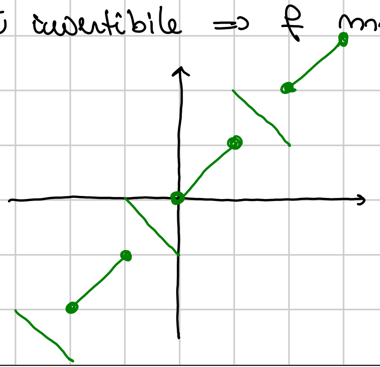
Oss. L'insieme A non è convesso e non è chiuso

Risposta 2.1   Se A è compatto, allora g è continua

Risposta 2.2   Se A è convesso, allora g è continua.

Esercizio   Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è invertibile $\Rightarrow$ f monotona?   NO





Lemma (DELLA SOTTO-SOTTO)

Sia x_n una successione.

Supponiamo che esista $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ con questa proprietà: ogni sotto-successione x_{n_k} ha una sotto-sotto-succ.

$$x_{n_{k_i}} \longrightarrow \ell \quad (\ell \text{ è sempre lo stesso})$$

Allora $x_n \to \ell$.

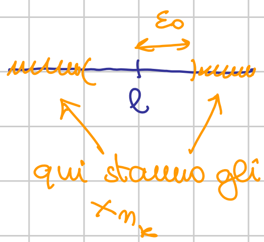
$\boxed{\text{Dim.}}$ Per assurdo (facciamo il caso $\ell \in \mathbb{R}$, gli altri sono uguali ⤳ esercizio). Se x_n non tende ad ℓ vuol dire che

$$\exists\, \varepsilon_0 > 0 \quad \forall\, n_0 \in \mathbb{N} \quad \exists\, n \geq n_0 \quad |x_n - \ell| \geq \varepsilon_0$$

Me la gioco con $n_0 = k$ e trovo $n_k \geq k$ t.c.

$$|x_{n_k} - \ell| \geq \varepsilon_0 \qquad \forall\, k \in \mathbb{N}$$

D'altra parte x_{n_k} dovrebbe avere una sotto-sotto che tende ad ℓ, il che è impossibile



— o — o —

Teorema 1 Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ compatto, sia $B \subseteq \mathbb{R}$, e sia $f : A \to B$ invertibile continua. Allora l'inversa $g : B \to A$ è continua.

$\boxed{\text{Dim}}$ Prendo un p.to $b \in B$ e prendo una qualunque successione $B \ni y_n \to b$. Detto $a = g(b)$ devo dim. che

$$\underset{\substack{\| \\ x_n}}{g(y_n)} \longrightarrow g(b) = a$$

Gli x_n stanno in A che è compatto. Quindi ogni s.succ. ha una sotto-sotto che tende ad un certo x_∞.

Chi è x_∞?

$$x_{n_{k_i}} \longrightarrow x_\infty$$

Applico f e ottengo $f(x_{n_{k_i}}) \to f(x_\infty)$

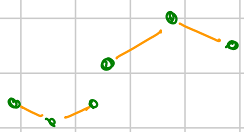
$$\begin{array}{ccc} f(x_{n_{k_i}}) & \to & f(x_\infty) \\ \parallel & & \parallel \\ y_{n_{k_i}} & \longrightarrow & b \end{array}$$

Ma allora l'unica possibilità è che sia $f(x_\infty) = b$, cioè $x_\infty = a$ (cioè l'unico elemento che va a finire in b).

Poiché ogni sotto-succ. di x_n ha una sotto-sotto che tende ad a, allora $x_n \to a$.

— o — o —

<u>Lemma</u> (del triangolino) Sia $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione che <u>non</u> è debolmente monotona.
Allora esistono $a < b < c$ in A tali che vale una delle seguenti

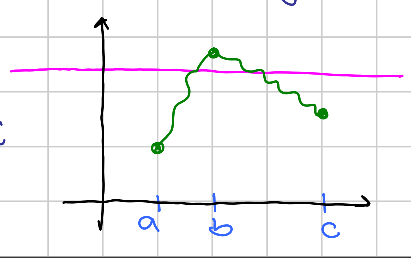


① $f(b) > f(a)$ e $f(b) > f(c)$
② $f(b) < f(a)$ e $f(b) < f(c)$

$\boxed{\text{Dim.}}$ Non la so fare (veloce). □

<u>Lemma</u> Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ convesso e sia $f : A \to \mathbb{R}$ iniettiva e CONTINUA.
Allora f è strettamente monotona.

$\boxed{\text{Dim.}}$ Ci basta dimostrare che è debolmente monotona (poi la stretta segue dall'iniettività).
Supponiamo per assurdo che non sia debolmente monotona. Allora applico il lemma del triangolino.
Nel caso ①. Prendo $\lambda < f(b)$, ma $\lambda > f(a)$ e $\lambda > f(c)$ e ho 2 intersezioni con il grafico (qui uso convessità e esistenza zeri).
Il caso ② è analogo.



Lemma Sia A convesso e sia $f : A \to \mathbb{R}$ monotona. Allora f è continua se e solo se l'immagine $f(A)$ è un convesso.

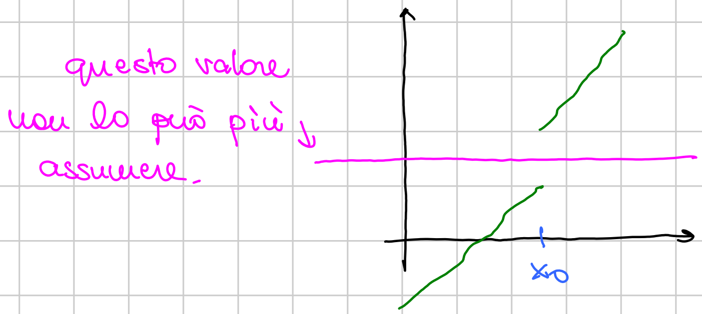
Dim. $\boxed{\Rightarrow}$ teo. di esistenza dei valori intermedi

$\boxed{\Leftarrow}$ Supponiamo per assurdo che non sia continua in un certo p.to x_0. Allora per forza

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) < \lim_{x \to x_0^+} f(x)$$

esistono per forza per monotonia

Ma allora tutto l'intervallo aperto che ha come estremi i due limiti non può essere contenuto nell'immagine.



— o — o —

ANALISI 1 — LEZIONE 121

Titolo nota 24/04/2015

Risposta 2.2 Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ convesso, sia $B \subseteq \mathbb{R}$ e sia $f : A \to B$ invertibile e CONTINUA.
Allora B è convesso e l'inversa $g : B \to A$ è continua

Dim. Essendo A convesso e f iniettiva, allora per forza f è strettamente monotona e la sua immagine è un convesso (lemmi precedenti).
L'inversa è monotona strettamente e ha come immagine A, che è convesso. Per il lemma precedente g è continua.

— o — o —

Oss. Tutte le inverse delle funzioni "classiche" rientrano in uno dei casi 2.1 o 2.2. Posto ovviamente che le funzioni di partenza siano continue.

— o — o —

Risposta ③ Se A e B sono convessi e $f : A \to B$ è invertibile e derivabile ovunque, non posso concludere che g (l'inversa) sia deriv. ovunque

Esempio $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f(x) = x^3$. L'inversa $g(x) = \sqrt[3]{x}$ non è derivabile in $x = 0$.

Teorema Sia $f : A \to B$ invertibile con A e B convessi. Sia $g : B \to A$ l'inversa. Sia $x_0 \in \operatorname{Int}(A)$ e sia $y_0 \in \operatorname{Int}(B)$ con $y_0 = f(x_0)$.
Supponiamo $f'(x_0) \neq 0$.
Allora g è derivabile in y_0 e $g'(y_0) = \dfrac{1}{f'(x_0)}$

$\boxed{\text{DIM FINTA}}$ $g(f(x)) = x$. Derivo a dx e sx:

$g'(f(x)) \cdot f'(x) = 1$. Pongo $x = x_0$ e ho finito.

Il problema è che non ho dimostrato che g è derivabile.

$\boxed{\text{Dim.}}$ Faccio il limite del rapporto incrementale:

$$g'(y_0) = \lim_{y \to y_0} \frac{g(y) - g(y_0)}{y - y_0}$$

Pongo $g(y) = x$, cioè $y = f(x)$
Quando $y \to y_0$ ho che $x \to x_0$
perché ho già la continuità

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \frac{1}{f'(x_0)}. \qquad \square$$

— o — o —

Oss. Vale quindi la formula (supponendo ora f derivabile in tutto A con $f' \neq 0$)

$$g'(y) = \frac{1}{f'(\underbrace{g(y)}_{\text{pto } x \text{ corrispondente a } y})}$$

Esempio $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f(x) = x^3 + x$.
Dimostrare che è invertibile, quindi calcolare $g(2), g'(2), g''(2)$ (dove g è l'inversa)

Invertibilità: 2 limiti + $f'(x) = 3x^2 + 1 \geq 1$ ...

$g(2) = \ldots$ devo risolvere $x^3 + x = 2$, quindi $g(2) = 1$

$$g'(2) = \frac{1}{f'(g(2))} = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{4}$$

Come calcolo g''? $\quad g'(y) = \dfrac{1}{f'(g(y))}$ Derivo a dx e sx

$$g''(y) = -\frac{1}{[f'(g(y))]^2}\, f''(g(y)) \cdot g'(y)$$

$$= -\frac{1}{[f'(g(y))]^3}\, f''(g(y))$$

$f''(x) = 6x$

Quindi $\quad g''(2) = -\dfrac{1}{[f'(1)]^3} \cdot f''(1) = -\dfrac{1}{4^3} \cdot 6$

— o — o —

Risposta (5) Se A e B sono convessi e $f: A \to B$ è di classe C^k e $f' \neq 0$ in A, allora l'inversa è di classe C^k

$\boxed{\text{Dim.}}$ BOOTSTRAP !!! $\quad g'(y) = \dfrac{1}{f'(g(y))}$

Idea: g è derivabile, anzi C^1, ma allora RHS è C^1, ma allora g è C^2, ma allora RHS è C^2, e così via.

Se f è di classe C^k mi fermo a $g \in C^k$ perché a quel pto posso dire che

$\underbrace{f'}_{C^{k-1}}(\underbrace{g(y)}_{C^k}) \in C^{k-1}$ da cui ritorno con $g \in C^k$.

— o — o —

Oss. Lo stesso discorso vale per le equazioni diff.

$u'(t) = \arctan u(t)$ $\rightsquigarrow$ quanto è regolare la soluzione, posto che esista?

Con il bootstrap si ottiene che $u \in C^\infty$. Se $u' = f(u)$ con $f \in C^{27}$, allora ottengo $u \in C^{28}$ e non di più in generale.

<u>Esempio</u> $g(x)$ = inversa di $f(x) = x^3 + x$.

Se volessi il polinomio di Taylor con centro in $x = 2$ e $n = 3$?

$\boxed{1^o \text{ modo}}$ Calcolo $g(2)$, $g'(2)$, $g''(2)$, $g'''(2)$ e uso formula

$\boxed{2^o \text{ modo}}$ Lo impongo a coeff. incogniti

$$g(2+h) = a + bh + ch^2 + dh^3 + o(h^3)$$

e uso che

$$f(g(2+h)) = 2+h$$

$$\parallel$$

$$g(2+h) + g^3(2+h) = 2+h$$

Sostituisco e trovo i coeff.

—o —o —

<u>Esempio</u> $f(x) = \int_0^x e^{-t^2}\,dt$

Dimostrare che esiste un intervallo $(-\delta, \delta)$ tale che

$$f : \mathbb{R} \to (-\delta, \delta)$$

è invertibile.

Detta g l'inversa, calcolare il polinomio di Taylor in $x=0$ di ordine 3 di $g(x)$.

Si vede subito che $f(0) = 0$ e $f(x)$ è strett. crescente $f'(x) = e^{-x^2}$.

Per $x \to \pm\infty$ tende a $\pm\sqrt{\frac{\pi}{2}} = \delta$

Quindi l'inversa esiste.

$g(0) = 0$

$g'(0) = \frac{1}{f'(0)} = 1$

$$f(x) \underset{x=0}{=} \int_0^x e^{-t^2}\,dt = \int_0^x (1 - t^2 + o(t^3))\,dt = x - \frac{x^3}{3} + o(x^4)$$

Sarà $g(x) = \underset{\overset{\parallel}{0}}{a} + \underset{\overset{\parallel}{1}}{b}x + \underset{\overset{\parallel}{0}}{c}x^2 + dx^3 + o(x^3)$ ⟸ perchè g è dispari

$$= x + dx^3 + o(x^3)$$

Impongo $f(g(x)) = x$

$$f(g(x)) = g(x) - \frac{[g(x)]^3}{3} + o(x^4) = x$$

$$= x + dx^3 - \frac{1}{3}x^3 + o(x^3) = x$$

Quindi $d = \frac{1}{3}$.

<u>Esercizio</u> Ottenere lo stesso risultato calcolando $g'''(0)$.

— o — o —

ANALISI 1 — LEZIONE 122

Titolo nota 28/04/2015

SIMBOLI DI LANDAU
→ o piccolo
→ O grande
→ equivalenza asintotica $(\sim)$

Setting: $f: A \to \mathbb{R}$, dato un p.to x_0 in cui fare i limiti ($x_0 \in \bar{\mathbb{R}}$ di accumulazione), data $g: A \to \mathbb{R}$.

Def. Si dice che $f(x) = o(g(x))$ per $x \to x_0$ se posso scrivere
$$f(x) = g(x)\,\omega(x)$$
con
$$\boxed{\lim_{x \to x_0} \omega(x) = 0}$$

Def. Si dice che $f(x) \sim g(x)$ per $x \to x_0$ se ...
$$\boxed{\lim_{x \to x_0} \omega(x) = 1}$$

Def. Si dice che $f(x) = O(g(x))$ per $x \to x_0$ se..

$\boxed{\omega(x) \text{ è limitata in un intorno di } x_0}$

oppure, che è lo stesso
$$\boxed{\limsup_{x \to x_0} |\omega(x)| \in \mathbb{R}}$$
se esiste il limite ed è reale, ancora meglio

Esempio $\sin x = O(x)$ per $x \to 0$

$\sin x = x \boxed{\frac{\sin x}{x}}$ $\omega(x) \to 1$ quindi $\sin x = O(x)$ e anzi $\sin x \sim x$

Oss. Nei casi in cui posso dividere per $g(x)$ si ha che

$\omega(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ e quindi le 3 definizioni coincidono limiti di $\frac{f(x)}{g(x)}$

Esempi

$$\left.\begin{array}{llll} \sin x = x + o(x^2) & \text{SI} & (1) \\ \sin x = x + O(x^2) & \text{SI} & (2) \\ \sin x = x + O(x^3) & \text{SI} & (3) \end{array}\right\} \text{per } x \to 0$$

Brutalmente: $o(x^{20})$ mangia tutte le potenze x^k con $k > 20$
$O(x^{20})$ " " " " x^k con $k \geq 20$

Per dimostrare la (2), cioè $\sin x - x = O(x^2)$ basta dividere per x^2 e verificare la limitatezza del rapporto

$$\omega(x) = \frac{\sin x - x}{x^2} \to 0$$

$\boxed{\text{Fatto 1}}$ Se $f(x) = o(g(x))$ per $x \to x_0$, allora $f(x) = O(g(x))$ per $x \to x_0$

$\boxed{\text{Dim.}}$ Se $\omega(x) \to 0$, allora $\limsup |\omega(x)| = 0 \in \mathbb{R}$.

$\boxed{\text{Fatto 2}}$ Se $f(x) \sim g(x)$ per $x \to x_0$, allora $f(x) = O(g(x))$ per $x \to x_0$

$\boxed{\text{Fatto 3}}$ $\left.\begin{array}{ll} f(x) = O(x^k) & \text{per } x \to 0 \\ g(x) = o(x^h) & \text{per } x \to 0 \end{array}\right\} \Rightarrow f(x)g(x) = o(x^{k+h})$

$\boxed{\text{Dim.}}$ $f(x) = x^k \omega_1(x)$
$g(x) = x^h \omega_2(x)$
$\leadsto f(x) \cdot g(x) = x^{k+h} \underbrace{\underset{\text{limitato}}{\omega_1(x)} \, \underset{0}{\omega_2(x)}}_{\downarrow \text{ carabinieri } 0}$

$\boxed{\text{Fatto 4}}$ $g(x) = o(x^k)$ per $x \to 0$
$f(x) = O(x)$ per $x \to 0$

Cosa posso dire di $g(f(x))$? Che è $o(x^k)$

$\boxed{\text{Dim}}$ $g(x) = x^k \underbrace{\omega_1(x)}_{\to 0}$, $\quad f(x) = x \cdot \underbrace{\omega_2(x)}_{\text{limitato}}$

$$g(f(x)) = [f(x)]^k \, \omega_1(f(x))$$

$$= \underbrace{x^k [\omega_2(x)]^k \, \omega_1(x \cdot \omega_2(x))}_{\omega_3(x)} = o(x^k)$$

$$\lim_{x \to 0} \omega_3(x) = \lim_{x \to 0} \underbrace{[\omega_2(x)]^k}_{\text{limitato}} \underbrace{\omega_1(x \cdot \omega_2(x))}_{0} = 0$$

Oss. Lo usiamo tutte le volte che si sviluppa una composizione:

$e^{\sin x}$ $\qquad e^t = 1 + t + \frac{1}{2} t^2 + \frac{1}{6} t^3 + \overbrace{o(t^3)}^{f(t)}$

$$e^{\sin x} = 1 + \sin x + \frac{1}{2}\sin^2 x + \frac{1}{6}\sin^3 x + \underbrace{o(\sin^3 x)}_{o(x^3)}$$

Cosa abbiamo usato ? $\left.\begin{array}{l} f(t) = o(t^3) \\ \sin x = O(x) \end{array}\right\} \Rightarrow f(\sin x) = o(x^3)$

$\boxed{\text{Fatto 5}}$ $g(x) = o(x^k)$
$f(x) = O(x)$ $\quad \Longrightarrow f(g(x)) = o(x^k)$

Dim. $g(x) = x^k \, \omega_1(x)$, with $\omega_1(x) \to 0$
$f(x) = x \, \underbrace{\omega_2(x)}_{\text{lim}}$

$$f(g(x)) = g(x) \, \omega_2(g(x))$$
$$= x^k \underbrace{\omega_1(x)}_{0} \underbrace{\omega_2(g(x))}_{\text{lim}}$$

Def. (Ordine di infinitesimo e di infinito e parte principale)

→ Se $f(x) \sim c\,x^{\alpha}$ per $x \to 0$ si dice che α è l'ordine di infinitesimo e $c\,x^{\alpha}$ è la parte principale
(se $\alpha < 0$ in realtà è un ordine di infinito)

→ se $f(x) \sim c\,x^{\alpha}$ per $x \to +\infty$ si dice analogamente..

Esempio 1 $\quad f(x) = x - \arctan x$

Per $x \to 0$ la parte principale è $\frac{1}{3}x^3$
Per $x \to +\infty$ la parte principale è x

Esempio 2 $\quad f(x) = \dfrac{\sin x - \arctan x}{x^{30}}$

Per $x \to 0$ tende a $+\infty$ e la parte principale è $\frac{1}{6}\frac{1}{x^{27}}$

$$\sin x - \arctan x = x - \frac{1}{6}x^3 - x + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3) = \frac{1}{6}x^3$$

Per $x \to +\infty$ non c'è una parte principale di tipo potenza, però posso dire che

$$f(x) = \underbrace{O\left(\frac{1}{x^{30}}\right)}$$

questa informazione basta per concludere che $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ converge assol.

Esercizio $\quad$ Se $f(x) \sim x$ per $x \to +\infty$ e
$f(x)$ è continua in $[0, +\infty)$
$\Rightarrow$ unif. cont. in $[0, +\infty)$?

NO! Basta prendere $f(x) = x + \underbrace{\sqrt{x} \cdot \sin x}$

non è unif. continua, e quindi non è $f(x)$
(sarebbe $f(x) - x$ = unif. cont.)

Esempio $\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = a_n$ ben definita perché la serie converge

$\displaystyle\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$, perché $a_n = \boxed{\sum_{k\geq1}^{\infty} \frac{1}{k^2}} - \boxed{\sum_{k\geq1}^{n-1} \frac{1}{k^2}} \to 0$

$\downarrow$ S $\downarrow$ S

Ordine di infinitesimo e parte principale di a_n = ?

Brutal mode: $\displaystyle a_n \sim \int_n^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx \sim \left[-\frac{1}{x}\right]_n^{+\infty} = \frac{1}{n}$

Per dimostrarlo rigorosamente basta fare un confronto serie-integrale.

Se fosse stato $\displaystyle a_n = \sum_{k\geq n}^{+\infty} \frac{1}{k^3} \sim \frac{1}{2n^2}$

Esempio $\displaystyle f(x) = \int_x^{x^2} \frac{1}{\arctan(t^{2015})}\,dt$

Per $x \to +\infty$ si ha $f(x) \sim \frac{2}{\pi} x^2$

Brutal mode: $\displaystyle f(x) \sim \int_x^{x^2} \frac{1}{\frac{\pi}{2}}\,dx \sim \frac{2}{\pi} x^2$

Per dimostrarlo rigorosamente divido per x^2 e faccio il limite con L'Hôpital MA devo prima verificare che $f(x) \to +\infty$ o usare Hôpital ottimizzato

$$f(x) = \int_x^{x^2} \frac{1}{\dots} \geq \int_x^{x^2} \frac{2}{\pi}\,dt = \frac{2}{\pi}(x^2 - x) \to +\infty$$

$$= \dots \leq \int_x^{x^2} \frac{1}{\arctan(1)}\,dt = \dots,$$

per ogni $x \geq 1$

ANALISI 1 – LEZIONE 123

Titolo nota 28/04/2015

Derivate: come dimostro che una funzione è derivabile o non derivabile in un p.to

Esempio $f(x) = \sqrt{|x|} \cdot |\sin x|$. In quali p.ti è derivabile?

Sicuramente in tutti gli $x \neq k\pi$. In questi p.ti x e $\sin x$ non si annullano, quindi i val. assd. non si annullano e tutto è composizione di funzioni derivabili.

Resta aperto il prob. dei p.ti $x = k\pi$.

Risposta: in $x=0$ è derivabile

in $x = k\pi$ con $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ non è derivabile

In $x=0$ faccio il rapporto incrementale

$$\frac{f(h)-f(0)}{h} = \frac{\sqrt{|h|}\cdot|\sin h|}{h} = \underbrace{\sqrt{|h|}}_{\downarrow\, 0} \underbrace{\boxed{\frac{|\sin h|}{h}}}_{\text{limitato}} \to 0$$

Detto altrimenti $f(x) \sim |x|^{3/2}$ per $x \to 0$.

Come verifico che non è derivabile in $x = k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$?

Ancora una volta rapp. incrementale.

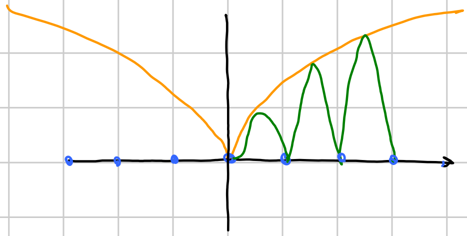
Caso $x = 2k\pi$ (in realtà funziona anche per $x = k\pi$)

$$\frac{f(2k\pi+h) - \overset{0}{\overset{\shortparallel}{f(2k\pi)}}}{h} = \frac{|2k\pi+h|^{1/2}\,|\sin(2k\pi+h)|}{h}$$

$$= \underbrace{|2k\pi+h|^{1/2}}_{\downarrow\, |2k\pi|^{1/2}} \underbrace{\frac{|\sin h|}{h}}_{\substack{\to +1 \text{ per } h\to 0^+ \\ \to -1 \text{ per } h \to 0^-}}$$

Se $k \neq 0$ il lim per $h \to 0$ non esiste

In tutti i p.ti $x = k\pi$ esistono derivata dx e sx e coincidono solo se $k = 0$.



Teorema Siano $a < b < c$ e sia $f : (a,c) \to \mathbb{R}$. Supponiamo che

- f sia derivabile in (a,b) e in (b,c) e continua in b
- si ha (in particolare i limiti esistono)

$$\lim_{x \to b^-} f'(x) = \lim_{x \to b^+} f'(x) = \ell$$

Allora $f'(b) = \ell$ (e in particolare esiste)

Lemma Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Supponiamo che

(i) f continua in $[a,b]$

(ii) f derivabile in $(a,b]$

(iii) esiste

$$\lim_{x \to a^+} f'(x) = \ell \in \mathbb{R}$$

Allora in $x = a$ esiste la derivata destra e vale ℓ

Dim.
$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Lagrange}}}{=} \frac{\cancel{h} \cdot f'(c(h))}{\cancel{h}}$$

Quando $h \to 0^+$ abbiamo che $c(h) \to a$, quindi RHS $\to \ell$ che quindi è la derivata destra.

— o — o —

$\boxed{\text{Dim. teorema}}$ Segue dal lemma applicato negli intervalli $[a,b)$ e $(b,c]$

Utilizzo operativo Supponiamo f continua in $\mathbb{R}$ e derivabile per $x \neq 0$.

Supponiamo che esistano

$$\lim_{x \to 0^+} f'(x) = \ell_1 \qquad \lim_{x \to 0^-} f'(x) = \ell_2$$

Allora: → se $\ell_1 = \ell_2$, allora $f'(0)$ esiste

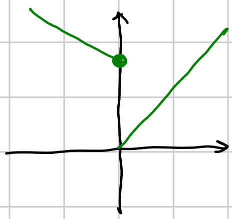
→ se $\ell_1 \neq \ell_1$, allora $f'(0)$ non esiste

$\boxed{\text{Dim.}}$ Segue dal fatto che

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \ell_1 \qquad \lim_{h \to 0^-} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \ell_2$$

— o — o —

Esempio La funzione $g(x) = \begin{cases} x & \text{per } x > 0 \\ 3 - x & \text{per } x \leq 0 \end{cases}$



può essere la derivata di una qualche $f(x)$?

NO! Se esistesse dovrebbe avere in $x = 0$ derivata destra $= 0$ e derivata sinistra $= 3$.

Conseguenza Se $f'(x)$ è discontinua in un p.to x_0, allora i limiti

$$\lim_{x \to x_0^+} f'(x) \quad \text{e} \quad \lim_{x \to x_0^-} f'(x)$$

non possono esistere (se fossero uguali, allora $f'(x_0)$ esisterebbe, ma sarebbe continua in x_0, se fossero diversi allora $f'(x_0)$ non esisterebbe).

Problema (aperto?) Data una funzione $g(x)$, stabilire se esiste $f(x)$ tale che $f'(x) = g(x)$

(se $g(x)$ è continua è banale)

Una condizione necessaria è la $\boxed{\text{PROPRIETÀ DI DARBOUX}}$ delle derivate:

Se $f(x)$ è derivabile in x_0, allora

$$\boxed{\liminf_{x \to x_0^+} f'(x) \leq f'(x_0) \leq \limsup_{x \to x_0^+} f'(x)}$$

e stessa cosa per $x \to x_0^-$

$\boxed{\text{Dim.}}$ $$\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \frac{\cancel{h} \cdot f'(c(h))}{\cancel{h}}$$

Faccio liminf e limsup a dx e sx per $h \to 0^+$ e per $h \to 0^-$.

<u>Esempio</u>

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{per } x = 0 \\ x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{per } x \neq 0 \end{cases}$$

Per $x \neq 0$ la derivabilità segue dai teoremi algebrici e

$$f'(x) = 2x \sin \frac{1}{x} + x^2 \cos \frac{1}{x} \left(-\frac{1}{x^2}\right) = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$$

Per vedere se è derivabile in $x = 0$ faccio il limite di $f'(x)$ per $x \to 0^+$ e per $x \to 0^-$. In questo caso non esistono, quindi non posso concludere nulla.

Per concludere uso rapp. increm. e ottengo che $f'(0) = 0$.

NB: liminf e limsup di $f'(x)$ per $x \to 0^+$ e $x \to 0^-$ sono ± 1, quindi la propr. di Darboux è salva.

— o — o —

<u>Oss.</u> Se $f(0) = 0$ e $f(x) = o(x)$ per $x \to 0$, allora $f'(0) = 0$

<u>Dim.</u> Rapporto incrementale.

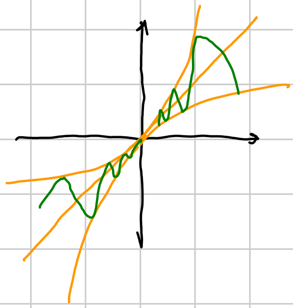
Esempio

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{per } x = 0 \\ x + 2x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{per } x \neq 0 \end{cases}$$

In questo caso $f'(0) = 1$ perchè $f(x) = x + 2$ quella di prima.

Questa funzione non è monotona in nessun intervallo del tipo $(-\delta, \delta)$ (ogni intervallo di questo contiene p.ti con $f'(x) > 0$ e punti con $f'(x) < 0$)

— o — o —



ANALISI 1 — LEZIONE 124

Titolo nota 28/04/2015

$\boxed{\text{EPPUR SI MUOVE}}$ Trovare una funzione $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ di classe C^∞ tale che $f^{(k)}(0) = 0$ per ogni $k \in \mathbb{N}$ e $f(x) > 0$ per ogni $x > 0$.

Nota bene: una funzione di questo tipo ha tutti i pol. di Taylor con centro in $x=0$ nulli, quindi non può essere la somma della sua serie di Taylor.

Esempio classico:
$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{per } x \leq 0 \\ e^{-\frac{1}{x}} & \text{per } x > 0 \end{cases}$$

oppure
$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{per } x = 0 \\ e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{per } x \neq 0 \end{cases}$$

Come dimostro che $f(x)$ (diciamo la 1ª) è di classe C^∞ su tutto $\mathbb{R}$?

Per $x \neq 0$ è tutto banale (composizione di C^∞).

La derivata prima è 0 per $x < 0$ e

$$f'(x) = e^{-\frac{1}{x}} \cdot \frac{1}{x^2} \quad \text{per } x > 0.$$

Basta verificare che $\lim_{x \to 0^+} f'(x) = 0$ e abbiamo $f'(0) = 0$ per lezione precedente.

Per fare il limite basta porre $y = \frac{1}{x}$ e viene $\lim_{y \to +\infty} \frac{y^2}{e^y} = 0$.

Vediamo $f''(x)$:

$$f''(x) = \begin{cases} 0 & \text{per } x < 0 \\ e^{-\frac{1}{x}} \frac{1}{x^4} - e^{-\frac{1}{x}} \frac{2}{x^3} & \text{per } x > 0 \end{cases}$$

Ancora una volta faccio il lim. di $f''(x)$ per $x \to 0^+$ e $x \to 0^-$ e trovo che $f''(0) = 0$.

Si può verificare per induzione che

$$f^{(k)}(x) = e^{-\frac{1}{x}} \frac{P_k(x)}{x^{2k}} \qquad \text{per } x > 0$$

$\leftarrow$ polinomio

Ancora una volta $\lim_{x \to 0^+} f^{(k)}(x) = 0$ (esponenziale vs polinomio)

e quindi $f^{(k)}(0) = 0$ per ogni $k \in \mathbb{N}$.

— o — o —

Esempio

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{per } x = 0 \\ e^{-\frac{1}{x^2}} \sin\left(e^{\frac{1}{x^2}}\right) & \text{per } x \neq 0 \end{cases}$$

Proprietà 1 $\quad f(x) = o(x^k)$ per ogni $k \in \mathbb{N}$ per $x \to 0$

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x^k} = \lim_{x \to 0} \underbrace{\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^k}}_{\downarrow\, 0} \underbrace{\sin\left(e^{\frac{1}{x^2}}\right)}_{\text{limitato}} = 0$$

Quindi $f(x)$ ammette pol. di Taylor (nulli) per ogni k.

Proprietà 2 $\quad f'(x) = e^{-\frac{1}{x^2}} \frac{2}{x^3} \sin(\,) + \cancel{e^{-\frac{1}{x^2}}} \cos(\,) \cancel{e^{\frac{1}{x^2}}} \left(-\frac{2}{x^3}\right)$

Fatta così $f'(x)$ non ha limite per $x \to 0^+$, anzi ha

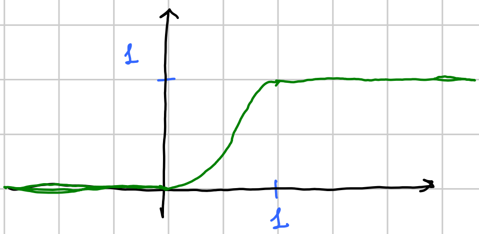
liminf $= -\infty$ e limsup $= +\infty$ (il cos oscilla e $\frac{1}{x^3} \to +\infty$)
quindi $f''(0)$ non esiste

Quindi: $f(x)$ ha i polinomi di Taylor di ogni grado, MA i coeff. non sono dati dalla formula con le derivate.

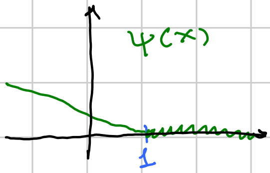
— o — o —

Esercizio Trovare una funzione $C^\infty(\mathbb{R})$ tale che

- $f(x) = 0$ per $x \leq 0$
- $f(x) = 1$ per $x \geq 1$
- $0 < f(x) < 1$ per $x \in (0,1)$



Trucco classico $f(x) = \dfrac{\varphi(x)}{\varphi(x) + \psi(x)}$ cercando φ e ψ opportune



Ad esempio $\psi(x) = \varphi(1-x)$

$\varphi(x) =$ eppur si muove
$\psi(x) = \varphi(1-x)$

$$f(x) = \frac{\varphi(x)}{\varphi(x) + \varphi(1-x)}$$

Verifichiamo la monotonia

$$f'(x) = \frac{\varphi'(x)\,[\varphi(x) + \varphi(1-x)] - \varphi(x)\,[\varphi'(x) - \varphi'(1-x)]}{[\ \ldots\ ]^2}$$

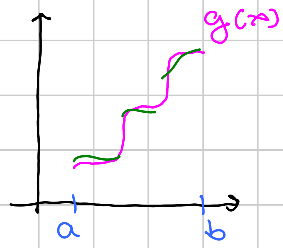
$$= \frac{\boxed{\varphi'(x)\,\varphi(1-x) + \varphi(x)\,\varphi'(1-x)}}{[\ \ldots\ ]^2}$$

> 0 per $x \in (0,1)$

Esercizio di analisi 3 Sia $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ una funzione integrabile secondo Riemann.

Dimostrare che, per ogni $\varepsilon>0$, esiste una funzione $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ di classe C^∞ tale che

$$\int_a^b |f(x)-g(x)|\,dx \le \varepsilon$$

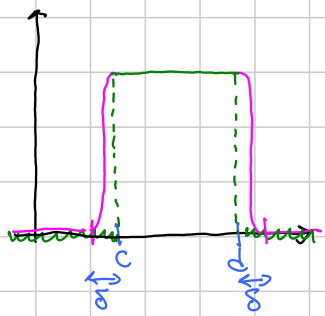


DIVIDE ET IMPERA!!

Caso banale $f(x)$ = rettangolino

cioè $f(x)$ vale λ in un intervallo $[c,d]$.

Faccio come prima ottenendo una C^∞ che vale 1 in $[c,d]$ e 0 quando $x\le c-\delta$ e $x\ge d+\delta$



Se δ è abbastanza piccolo l'integrale della differenza è piccolo.

Caso semibanale: $f(x)$ = step function: basta approssimare tutti i rettangoli allo stesso modo

$$f(x)=\sum \underbrace{f_i(x)}_{\text{di tipo banale}} \qquad g(x)=\sum \underbrace{g_i(x)}_{C^\infty \text{ che approx. le } f_i(x)}$$

$$\int_a^b |f(x)-g(x)|\,dx \le \sum \int_a^b \underbrace{|f_i(x)-g_i(x)|\,dx}_{\text{possono diventare piccoli a piacere}}$$

Caso generale: approssimo $f(x)$ con una step function $\varphi(x)$ che ha $\int|f-\varphi|\le\frac{\varepsilon}{2}$, e poi approssimo φ con una C^∞ g che ha $\int|\varphi-g|\le\frac{\varepsilon}{2}$. Quindi g è la C^∞ cercata.

ANALISI 1 — LEZIONE 125

Titolo nota 29/04/2015

FORMULA DI STIRLING

$$\boxed{n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n}$$

(il rapporto tende a 1)

PRODOTTO DI WALLIS

$$\boxed{\prod_{k=1}^{n} \frac{2k \cdot 2k}{(2k-1)(2k+1)} \to \frac{\pi}{2}}$$

Strategia per dim. di Stirling: pongo

$$S_n := \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \frac{1}{n!}$$

e dimostro ① $S_n \longrightarrow S_\infty \in \mathbb{R}$
② $S_\infty = 1$
$\Rightarrow$ Formula di Stirling

Dim di ①

$$\frac{S_{n+1}}{S_n} = \sqrt{\cancel{2\pi}(n+1)}\,\frac{(n+1)^{n+1}}{e^{\cancel{n+1}}}\,\frac{1}{\cancel{(n+1)}\cancel{n!}}\,\frac{\cancel{e^n}\,\cancel{n!}}{n^n\sqrt{\cancel{2\pi}n}}$$

$$= \sqrt{\frac{n+1}{n}}\,\frac{1}{e}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n$$

$$= \frac{1}{e}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}}$$

In particolare per induzione si ottiene

$$S_n = S_1 \cdot \prod_{k=1}^{n-1} \frac{S_{k+1}}{S_k} = S_1 \cdot \prod_{k=1}^{n-1} \frac{1}{e}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k+\frac{1}{2}}$$

Passo ai logaritmi e ottengo

$$\log S_n = \log S_1 + \sum_{k=1}^{n-1} \overbrace{\left[\left(k+\frac{1}{2}\right)\log\left(1+\frac{1}{k}\right) - 1\right]}^{\text{logaritmo di}}$$

Quando $n \to +\infty$ otteniamo che il RHS tende alla somma della serie, posto che questa converga. Quindi se la serie converge, allora $S_n \to S_\infty$ e

$$\log S_\infty = \log S_1 + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\left(k+\frac{1}{2}\right) \log\left(1+\frac{1}{k}\right) - 1 \right]$$

<u>Esercizio</u> La serie converge. Con Taylor

$$\left(k+\frac{1}{2}\right)\log\left(1+\frac{1}{k}\right) - 1 = \left(k+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{2k^2} + \frac{1}{3k^3} + o\left(\frac{1}{k^4}\right)\right) - 1$$

$$= \cancel{1} - \cancel{\frac{1}{2k}} + \frac{1}{3k^2} + \cancel{\frac{1}{2k}} - \frac{1}{4k^2} + o\left(\frac{1}{k^3}\right) - \cancel{1}$$

$$= \frac{1}{12k^2} + o\left(\frac{1}{k^2}\right) \implies \text{la serie converge}$$

— o — o —

<u>Punto</u> 2 : Dando per buono il prodotto di Wallis, dim. $S_\infty = 1$.

$$\underbrace{\prod_{k=1}^{n} \frac{2k \cdot 2k}{(2k-1)(2k+1)}}_{\substack{\shortparallel \\ W_n}} \to \frac{\pi}{2} \qquad \text{per } n \to +\infty$$

$$W_n = \frac{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot (2n) \cdot (2n)}{1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1) \cdot (2n+1)}$$

Moltiplico sopra e sotto per il num.

$$= \frac{[2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (2n)(2n)]^2}{[(2n)!]^2 (2n+1)} = \frac{4^{2n} (n!)^4}{[(2n)!]^2 (2n+1)}$$

Quindi

$$\sqrt{W_n} = \frac{2^{2n} (n!)^2}{(2n)! \sqrt{2n+1}}$$

Uso che $n! = \frac{1}{S_n} \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$

$$= \frac{\cancel{2^{2n}} \frac{1}{S_n^2} 2\pi n \cancel{\left(\frac{n}{e}\right)^{2n}}}{\frac{1}{S_{2n}} \sqrt{2\pi \cdot 2n} \cancel{\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}} \sqrt{2n+1}}$$

$$\boxed{\sqrt{W_n}} = \boxed{\frac{S_{2n}}{S_n^2}} \boxed{\sqrt{2\pi}} \boxed{\frac{n}{\sqrt{2n}\sqrt{2n+1}}}$$

$$\frac{\sqrt{\cancel{\pi}}}{\sqrt{\cancel{2}}} = \frac{1}{S_\infty} \cdot \sqrt{\cancel{2\pi}} \cdot \frac{1}{\cancel{2}} \implies S_\infty = 1$$

— o — o —

Dimostrazione del prodotto di Wallis

$$I_n := \int_0^\pi \sin^n x \, dx$$

lo faccio per parti con grande ritorno:

$$I_n = \int_0^\pi \sin^{n-2} x \, (1-\cos^2 x)\, dx$$

$$= I_{n-2} - \int_0^\pi \underbrace{\sin^{n-2} x \cdot \cos x}_{f} \cdot \underbrace{\cos x}_{G} \, dx$$

$$= I_{n-2} - \Big[\underbrace{\frac{1}{n-1} \cdot \sin^{n-1} x}_{F} \cdot \underbrace{\cos x}_{G}\Big]_0^\pi - \int_0^\pi \underbrace{\frac{1}{n-1} \sin^{n-1} x}_{F} \underbrace{\sin x}_{g} \, dx$$

$$= I_{n-2} - \frac{1}{n-1} I_n \qquad \text{Grande ritorno}$$

$$\underbrace{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)}_{\frac{n}{n-1}} I_n = I_{n-2} \implies \boxed{I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}}$$

Dal cilindro $R_n := \dfrac{I_{2n+1}}{I_{2n}}$. Allora

$$R_n = \frac{I_{2n+1}}{I_{2n}} = \frac{\frac{2n}{2n+1} I_{2n-1}}{\frac{2n-1}{2n} I_{2n-2}} = \frac{2n \cdot 2n}{(2n-1)(2n+1)} R_{n-1}$$

Da questa per induzione si ottiene

$$R_n = R_0 \cdot \underbrace{\prod_{k=1}^{n-1} \frac{2k \cdot 2k}{(2k-1)(2k+1)}}_{W_{n-1}} = R_0 \cdot W_{n-1}$$

Ora $R_0 = \dfrac{I_1}{I_0} = \dfrac{\int_0^\pi \sin x \, dx}{\int_0^\pi 1 \, dx} = \dfrac{2}{\pi}$

quindi

$$R_n = \frac{2}{\pi} W_{n-1}$$

Quindi mi basta dim. che $R_n \to 1$

$$\frac{2n}{2n+1} I_{2n} \leq \frac{2n}{2n+1} I_{2n-1} = I_{2n+1} \leq I_{2n}$$

$\sin^{2n} \leq \sin^{2n-1}$ ricorrenza perché $\sin^{2n+1} \leq \sin^{2n}$

Dividendo tutto per I_{2n} si ottiene

$$\boxed{\frac{2n}{2n+1}} \leq \frac{I_{2n+1}}{I_{2n}} = R_n \leq \boxed{1}$$

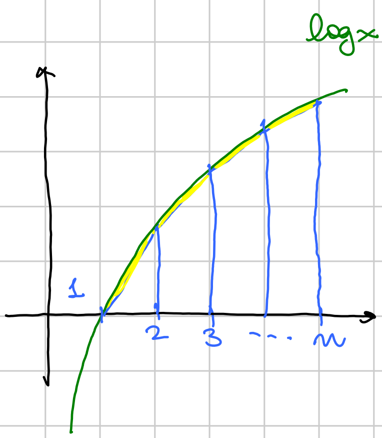
$\downarrow 1 \qquad \downarrow 1 \qquad \downarrow 1$

— o — o — FINE STIRLING – WALLIS

Torniamo alla serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\left[\left(n+\frac{1}{2}\right) \log\left(1+\frac{1}{n}\right) - 1 \right]}_{\geq 0}$$

≥ 0 = Area tra il trapezio ed il logaritmo



$$\underbrace{\int_n^{n+1} \log x \, dx}_{\text{integrale}} - \underbrace{\frac{\log(n+1) + \log n}{2}}_{\text{area trapezio}}$$

$$\int \log x \, dx = x \log x - x$$

$$\int_n^{n+1} \log x \, dx = (n+1)\log(n+1) - (\cancel{n}+1) - n \log n + \cancel{n}$$

$$= n\left[\log(n+1) - \log n\right] + \log(n+1) - 1$$

Sottraendo viene

$$\int_n^{n+1} \log x \, dx - \frac{\log(n+1) + \log n}{2}$$

$$= n\left[\log(n+1) - \log n\right] + \frac{\log(n+1) - \log n}{2} - 1$$

$$= \left(n + \frac{1}{2}\right)\underbrace{\left[\log(n+1) - \log n\right]}_{\log\left(1+\frac{1}{n}\right).} - 1$$

Questo ci dice che $\dfrac{S_{n+1}}{S_n} \geq 1$ perchè ha $\log \geq 0$,

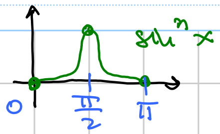
quindi ho monotonia di S_n (in particolare $S_n \geq S_1$).

— o — o —

ANALISI 1 — LEZIONE 126

Titolo nota 29/04/2015

Esercizio $I_n := \int_0^{\pi} \sin^n x \, dx$

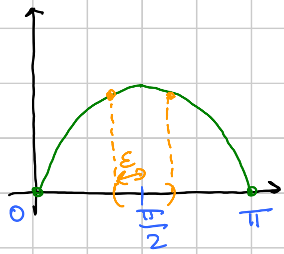


Abbiamo dim. che $0 \leq I_{n+1} \leq I_n$, quindi $I_n \to I_\infty$. Chi è I_∞?

Brutalmente $I_n \to 0$, ma come lo dimostro?

1ª possibilità: separo pari e dispari, uso la ricorsione e mostro che la produttoria tende a 0

2ª possibilità: fisso $\varepsilon > 0$



$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon} \sin^n x + \underbrace{\int_{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}^{\pi/2+\varepsilon} \dots}_{\leq 2\varepsilon} + \int_{\frac{\pi}{2}+\varepsilon}^{\pi} \dots$$

ampiezza interv. per max funzione

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon} \sin^n x \, dx \leq \underbrace{\left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right)}_{\text{ampiezza intervallo}} \cdot \underbrace{\left[\sin\left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right)\right]^n}_{\text{max funzione}}$$

Quindi

$$I_n \leq 2\varepsilon + \pi \boxed{\left[\sin\left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right)\right]^n}$$

$\downarrow$
0

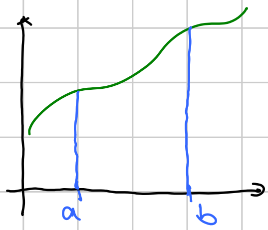
Facendo limsup a dx e sx ottengo

$$\limsup_{n\to+\infty} I_n \leq 2\varepsilon$$

Essendo ε arbitrario deduco $\limsup_{n\to+\infty} I_n = 0$

<u>Domanda</u>: ordine di infinitesimo e parte principale di I_n
↑ (difficoltà ignota)

<u>Esercizio 2</u> Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ di classe C^2



$|$Integrale $-$ area trapezio$| =$

$$= \left| \int_a^b f(x)\,dx - (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2} \right| \le (b-a)^3 \cdot \max\{|f''(x)| : x \in [a,b]\}$$

$$\underbrace{\text{Integrale} - \text{area trapezio}}_{\text{errore}} = \int_a^b \underbrace{\boxed{f(x) - \underset{\text{retta}}{r(x)}}}_{\varphi(x)}\,dx$$

$$|\text{Errore}| = \left| \int_a^b \varphi(x)\,dx \right| \le \int_a^b |\varphi(x)|\,dx$$

Devo stimare $|\varphi(x)|$.

<u>1ª stima</u> $|\varphi(x)| = |\varphi(x) - \overset{0}{\varphi(a)}| \underset{\text{Lagrange}}{=} |x-a| \cdot |\varphi'(c)|$

$\le |b-a| \cdot |\varphi'(c)|$

Osservazione: per ROLLE esiste un pto $d \in (a,b)$ t.c. $\varphi'(d) = 0$. Ma allora

<u>2ª stima</u>: $|\varphi'(c)| = |\varphi'(c) - \overset{0}{\varphi'(d)}| \underset{\text{Lagrange su } \varphi'}{=} |c-d| \cdot |\varphi''(e)|$

$= |c-d| \cdot |f''(e)|$

$\le |b-a| \cdot \max\limits_{x \in [a,b]} |f''(x)|$

Mettendo insieme le 2 stime: $|\varphi(x)| \le |b-a|^2 \cdot \max |f''(x)|$
Integrando in $[a,b]$ ho la tesi.

— o — o —

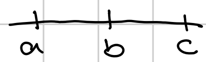
INTEGRALE DARBOUX VS INTEGRALE DI RIEMANN

Oss 1 Conviene definire l'integrale su tutto $\mathbb{R}$, limitandosi a funzioni che sono nulle fuori da un intervallo e limitate globalmente

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(x)\,dx \qquad \hat{f}(x) = \begin{cases} f(x) & x \in [a,b] \\ 0 & x \notin [a,b] \end{cases}$$

Con questa notazione, il fatto che

$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx$$



è un caso particolare dell'integrale della somma.

<u>Def. anarchica</u> (quella data)

Int. superiore $= \inf \int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\,dx$: φ a scalino e $\varphi(x) \geq f(x)$ in $\mathbb{R}$

<u>Def. alla DARBOUX</u>. Faccio così le funzioni a scalino:

→ prendo una suddivisione $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$ e pongo

$$\varphi(x) := \sup\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\} \quad \forall x \in (x_{i-1}, x_i)$$

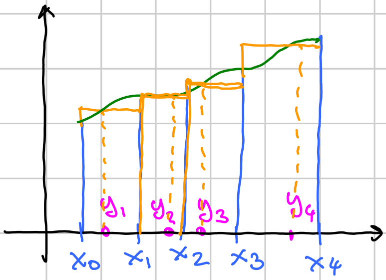
in ogni intervallino $\varphi(x)$ è il sup di f

→ definisco l'integrale superiore come l'inf di $\int_{\mathbb{R}} \varphi(x)$, dove $\varphi(x)$ è fatta come sopra

Viene la stessa nozione

Definizione di RIEMANN

Suddivido con $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$ come prima.
In ogni intervallino prendo un p.to a caso $y_i \in (x_{i-1}, x_i)$
e costruisco la funzione a gradino che vale $f(y_i)$
in quell'intervallo.



Def. (Riemann) Si dice che $f(x)$ è integrabile su $\mathbb{R}$ se esiste un numero I (che sarà l'integrale) con questa proprietà:

$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ tale che qualunque somma S ottenuta a partire da una suddivisione con pezzi tutti di lungh. $\leq \delta$ verifica
$$|I - S| \leq \varepsilon.$$

Teorema Le due definizioni (anzi 3: anarchica, Darboux, Riemann sono equivalenti)

Sottocaso: sia $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ continua. Allora $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ tale che se suddivido con pezzi qualunque $\leq \delta$, allora la somma di Riemann corrispondente dista dall'integrale meno di ε.

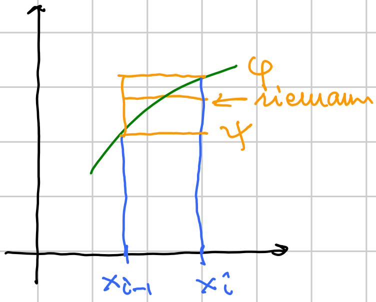
Dim. Per la dimostrazione classica sappiamo che esistono funzioni a gradino sopra e sotto
$$\underset{\varphi(x)}{\text{sopra}} \qquad \underset{\psi(x)}{\text{sotto}}$$
tali che
$$\int_a^b (\varphi(x) - \psi(x))\, dx \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

Inoltre possiamo supporre che φ e ψ arrivino dalla stessa suddivisione e posso supporre che i pezzi siano

tutti piccoli quanto voglio (se serve aggiungo p.ti).
Scelgo δ dell'unif. continuità in modo che corrisponda ad $\frac{\varepsilon}{2(b-a)}$, cioè

$$|x-y| \leq \delta \Rightarrow |f(x)-f(y)| \leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$$

Ora in ogni intervallino



$$\underbrace{\psi \leq \text{riemann} \leq \varphi(x)}_{\text{differenza} \leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)}}$$

Quindi

$$\int_a^b \varphi - \text{riemann} \leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)}(b-a)$$
$$= \frac{\varepsilon}{2}$$

Esercizio Dimostrare la stessa cosa assumendo solo che f sia integrabile.

— o — o —

ANALISI 1 - LEZIONE 127

Titolo nota 12/05/2015

CONFRONTO TRA DEFINIZIONI DI INTEGRALE

Ingrediente: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con due proprietà

(i) limitata, cioè $\exists\, M \in \mathbb{R}$ t.c. $|f(x)| \leq M \quad \forall x \in \mathbb{R}$

(ii) nulla fuori di un intervallo, cioè $\exists\, [a,b] \subseteq \mathbb{R}$ t.c.

$$f(x) = 0 \qquad \forall x \notin [a,b]$$

Voglio definire $\int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx$

Definizioni

① Una partizione P è un insieme di p.ti

$$x_0 < x_1 < \ldots < x_n \qquad \text{(} n \text{ può dipendere da } P\text{)}$$

② Una partizione P ingloba $[a,b]$ se

$$x_0 \leq a \qquad \text{e} \qquad x_n \geq b$$

③ Una funzione $\varphi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si dice step function se esiste una partizione P ed esistono numeri reali $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ tali che

$$\varphi(x) = \lambda_i \qquad \forall x \in (x_{i-1}, x_i)$$

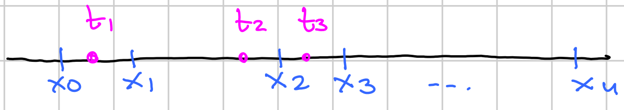
$$\varphi(x) = 0 \qquad \forall x < x_0 \ \text{ e } \ \forall x > x_n$$

(non sto prescrivendo cosa vale nei p.ti x_i)

④ Indichiamo con SF l'insieme delle step function

⑤ Una partizione taggata (tagged partition) è una coppia (P, T) dove P è una partizione e $T = (t_1, \ldots, t_n)$ sono p.ti tali che

$$t_i \in (x_{i-1}, x_i) \qquad \forall i = 1, \ldots, n$$



⑥ Si definisce diametro di una partizione il numero reale positivo

$$\operatorname{diam}(P) := \max\{|x_i - x_{i-1}| : i = 1, \dots, n\}$$

⑦ Si definisce

$$SF_f^+ := \{\varphi \in SF : \varphi(x) \geq f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}\}$$

$$SF_f^- := \{\varphi \in SF : \varphi(x) \leq f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}\}$$

Def. (Integrale "quadratico") Data f come sopra, si pone

$$I^+(f) := \inf\left\{\int_a^b \varphi(x)\,dx : \varphi \in SF_f^+\right\}$$

$$I^-(f) := \sup\left\{\int_a^b \varphi(x)\,dx : \varphi \in SF_f^-\right\}$$

Ovviamente $\displaystyle\int_a^b \varphi(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (x_i - x_{i-1}) \quad \forall \varphi \in SF$

Si dice che f è integrabile se $I^+(f) = I^-(f)$ (in generale vale solo $I^-(f) \leq I^+(f)$).

Criterio Una funzione f è integrabile se e solo se

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, \varphi_\varepsilon \in SF_f^+ \quad \exists\, \psi_\varepsilon \in SF_f^- \quad t.c.$$

$$\int_a^b (\varphi_\varepsilon(x) - \psi_\varepsilon(x))\,dx \leq \varepsilon$$

Posso considerare φ_ε e ψ_ε come provenienti da una stessa partizione.

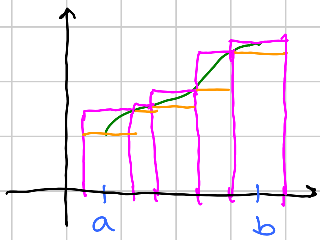
—o—o—

Def. (Integrale di DARBOUX) Sia f come sempre.
Per ogni partizione P che ingloba $[a,b]$ definiamo

$$M_i := \sup \{ f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i] \}$$
$$m_i := \inf \{ f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i] \}$$

Poi pongo
$$I_D^+(f,P) := \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) M_i$$
$$I_D^-(f,P) := \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) m_i$$

Ora definisco



$$I_D^+(f) := \inf \{ I_D^+(f,P) : P \text{ ingloba } [a,b] \}$$

$$I_D^-(f) := \sup \{ I_D^-(f,P) : P \text{ ingloba } [a,b] \}$$

Come prima si ha sempre $I_D^-(f) \leq I_D^+(f)$. Se vale il segno di uguale, allora si dice che f è integrabile alla Darboux.

Criterio Una funzione f è int. alla Darboux se e solo se

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0 \ \exists P_\varepsilon \text{ che ingloba } [a,b] \text{ t.c. } I_D^+(f,P_\varepsilon) - I_D^-(f,P_\varepsilon) \leq \varepsilon}$$

Teorema (esercizio)

Per ogni funzione f ammissibile l'integrale superiore e inferiore "quadretti" coincidono con quelli alla Darboux.

Def. (alla Riemann) Sia f come sempre.
Per ogni partizione taggata P, T con P che ingloba $[a,b]$ definisco

$$\underbrace{S(f,P,T)}_{\text{somma di Riemann relativa a } P, T.} := \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \underbrace{f(t_i)}_{\text{valore intermedio tra } m_i \text{ e } M_i}$$

Si dice che f è integrabile alla Riemann, ed il suo integrale vale I, se

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ t.c. $\forall (P,T)$ part. taggata che ingloba $[a,b]$

$$\boxed{\operatorname{diam}(P) \leq \delta \Rightarrow |I - S(f,P,T)| \leq \varepsilon}$$

Oss. La definizione produce un integrale senza passare dall'integrale inferiore e superiore e soprattutto senza usare le parole inf e sup.

Teorema Una funzione f ammissibile è integrabile alla Riemann se e solo se è integrabile alla Darboux, e questo vale a sua volta se e solo se è integrabile in senso "anarchico".

Caso speciale Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ Lipschitziana con costante L.
Estendiamo f a tutto $\mathbb{R}$ ponendola 0 fuori da $[a,b]$.
Come posso stimare

$$\int_a^b f(x)\,dx - S(f, \underbrace{P}_{\text{partizione con } x_0 = a \text{ e } x_n = b}, T)$$

Detto altrimenti: se approssimo $\int_a^b f(x)\,dx$ con una somma di Riemann, che errore commetto?

$\boxed{\text{Sol.}}$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx \quad \text{(uso thm. media int.)}$$

$$= \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1})\, f(s_i)$$

↑ misterioso nell'interv.

D'altra parte

$$S(f,P,T) = \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1})\, f(t_i)$$

↑ tag dati

Quindi

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx - S(f,P,T) \right| = \left| \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1})(f(s_i) - f(t_i)) \right|$$

$$\leq \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1})\, |f(s_i) - f(t_i)|$$

$$\overset{\text{Lip}}{\leq} \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1})\, L\, |s_i - t_i|$$

$$\leq \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1})\, L\, \underbrace{|x_i - x_{i-1}|}_{\leq \text{diam}(P)}$$

$$\leq L\, \text{diam}(P) \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1})$$

$$= L\, \text{diam}(P) \cdot (b-a)$$

Risposta: l'errore commesso è proporzionale al diametro della partizione, quindi tende a 0 quando diam → 0.

Varianti: se f è α-Hölder troverei

$$\text{errore} \leq M(b-a)\, \underbrace{[\text{diam}(P)]^\alpha}_{\text{modulo di continuità}}$$

in generale qui c'è → $\omega(\text{diam}(P))$

ANALISI 1 – LEZIONE 128

Titolo nota 12/05/2015

Teorema (Freccia difficile del confronto Riemann–Darboux)
Sia f come sempre (limitata e nulla fuori da un intervallo).
Supponiamo che f sia integrabile alla Darboux.
Allora per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx - S(f, P, T) \right| \leq \varepsilon$$

per ogni partizione P di diametro $\leq \delta$.

$\boxed{\text{Dim.}}$ Dato $\varepsilon > 0$ devo trovare δ.
Poichè f è integrabile alla Darboux, esiste una partizione P_ε che ingloba $[a,b]$ tale che

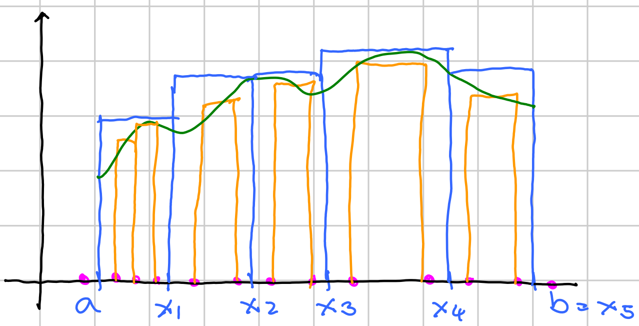
$$I_D^+(f, P_\varepsilon) - I_D^-(f, P_\varepsilon) \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Sia n_ε il numero di p.ti di P_ε. È facile vedere che posso anche assumere che sia

$$x_0 = a \qquad\qquad x_{n_\varepsilon} = b$$

Pongo $$\delta := \frac{\varepsilon}{2(n+1)M} \qquad |f(x)| \leq M \text{ ovunque}$$

e sostengo che ogni partizione taggata P, T con diam $(P) \leq \delta$ produce un errore $\leq \varepsilon$.



La partizione $\mathcal{P}$ ha estremi $y_0 < y_1 < y_2 < \ldots < y_m$

Suddivido i p.ti di $\mathcal{P}$ in due categorie

$Int = \{ i \in \{1, \ldots, m\}$ t.c. (y_{i-1}, y_i) sta in uno stesso intervallo della partizione $\mathcal{P}_\varepsilon \}$

$Cav = \{ i \in \{1, \ldots, m\}$ t.c. (y_{i-1}, y_i) sta a cavallo tra 2 o più intervalli della $\mathcal{P}_\varepsilon \}$

$$S(f, \mathcal{P}, T) = \sum_{i=1}^{m} (y_i - y_{i-1}) f(t_i)$$

$$= \underbrace{\sum_{i \in Int} (y_i - y_{i-1}) f(t_i)}_{\leq I_D^+ (f, \mathcal{P}_\varepsilon)} + \underbrace{\sum_{i \in Cav} (y_i - y_{i-1}) f(t_i)}_{\leq (n_\varepsilon + 1)\, \delta\, M}$$

somma aree arancioni

numero dei pezzi a cavallo

diametro

$|f(x)| \leq M$ ovunque

$$\leq I_D^+ (f, \mathcal{P}_\varepsilon) + (n_\varepsilon + 1)\, \delta M$$

Ragionando analogamente dal basso, otteniamo

$$S(f, \mathcal{P}, T) \geq I_D^- (f, \mathcal{P}_\varepsilon) - (n_\varepsilon + 1)\, \delta M .$$

Ma allora

$$\int_a^b f(x)\,dx - S(f, \mathcal{P}, T) \leq \underbrace{I_D^+ (f, \mathcal{P}_\varepsilon) - I_D^- (f, \mathcal{P}_\varepsilon)}_{\leq \frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{(n_\varepsilon + 1)\, \delta M}_{\leq \frac{\varepsilon}{2}}$$

se $\delta \leq \dfrac{\varepsilon}{2M(n_\varepsilon + 1)}$

In modo del tutto analogo si ottiene

$$\int_a^b f(x)\,dx - S(f, \mathcal{P}, T) \geq \overbrace{I_D^- (f, \mathcal{P}_\varepsilon) - I_D^+ (f, \mathcal{P}_\varepsilon)}^{\geq -\frac{\varepsilon}{2}} - \overbrace{(n_\varepsilon + 1)\, \delta M}^{\geq -\frac{\varepsilon}{2}} \geq -\varepsilon .$$

Siano $f(x)$ e $g(x)$ integrabili in $[a,b]$.
Come si dimostra che $f(x) \cdot g(x)$ è integrabile?

<u>Lemma</u> Siano a, b, c, d numeri reali tali che

$$a \le b \quad e \quad c \le d.$$

Allora

$$\max\{b,d\} - \max\{a,c\} \le (b+d) - (a+c)$$

Dim. wlog $d \ge b$ (altrimenti scambio le coppie)
Distinguo 2 casi

- Se $a \ge c$, allora

$$LHS = d - a \le (d-a) + \underbrace{(b-c)}_{\ge 0 \text{ perché } b \ge a \ge c}$$

$$b \underset{\text{Hp}}{\ge} a \underset{\text{caso}}{\ge} c$$

- Se $a \le c$, allora

$$LHS = d - c \le (d-c) + \underbrace{(b-a)}_{\ge 0 \text{ perché } b \ge a}$$

— o — o —

Dim. che $\max\{f(x), g(x)\}$ è integrabile

Siano $f(x)$ e $g(x)$ integrabili. Siano $\varphi_1(x)$ e $\varphi_2(x) \in SF$ tali che

$$\varphi_1(x) \le f(x) \le \varphi_2(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\int_{\mathbb{R}} (\varphi_2(x) - \varphi_1(x))\, dx \le \frac{\varepsilon}{2}$$

Analogamente $\quad \psi_1(x) \le g(x) \le \psi_2(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}$

$$\int_{\mathbb{R}} (\psi_1(x) - \psi_2(x))\, dx \le \frac{\varepsilon}{2}$$

Posso supporre che tutte arrivino dalla stessa partizione.

Ora si ha che

$$\underbrace{\max\{\varphi_1(x), \psi_1(x)\}}_{g_1(x)} \leq \max\{f(x), g(x)\} \leq \underbrace{\max\{\varphi_2(x), \psi_2(x)\}}_{g_2(x)}$$

e per il lemma

$$\int_a^b (g_2(x) - g_1(x))\,dx \leq \int_a^b [(\varphi_2 + \psi_2) - (\varphi_1 + \psi_1)]\,dx$$

$$= \int_a^b (\varphi_2 - \varphi_1)\,dx + \int_a^b (\psi_2 - \psi_1)\,dx$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$$

— o — o —

Conseguenza immediata:

$f(x)$ int. secondo Riemann $\Rightarrow$ $|f(x)|$ int...

Dim. $|f(x)| = \max\{f(x), -f(x)\}$.

— o — o —

<u>Integrabilità del prodotto</u>

Dim. Siamo

$$\varphi_1 \leq f \leq \varphi_2$$
$$\psi_1 \leq g \leq \psi_2$$

come prima. Se fossero tutte positive (cioè $\varphi_1 \geq 0$, $\psi_1 \geq 0$) potrei scrivere

$$\varphi_1 \psi_1 \leq f g \leq \varphi_2 \psi_2$$

e stimare la differenza

$$\int (\varphi_2 \psi_2 - \varphi_1 \psi_1)\,dx = \int (\varphi_2 \psi_2 - \varphi_2 \psi_1 + \varphi_2 \psi_1 - \varphi_1 \psi_1)\,dx$$

$$= \int \underbrace{\varphi_2}_{\leq M} (\psi_2 - \psi_1) + \int \underbrace{\psi_1}_{\leq M} (\varphi_2 - \varphi_1)$$

$$\leq M \left\{ \underbrace{\int (\psi_2 - \psi_1)}_{\leq \frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{\int (\varphi_2 - \varphi_1)}_{\leq \frac{\varepsilon}{2}} \right\}$$

$$\leq M\varepsilon$$

Quindi ho trovato funzioni SF sopra e sotto fg con integrali vicini a piacere.

Se fossero tutte e 2 negative non cambia molto.
Se fossero + e −, raccolgo un segno − e ho il prodotto di due +.
Se $f(x)$ e $g(x)$ cambiano segno, basta scrivere

$$f(x) = \underbrace{\max\{f(x), 0\}}_{f_1(x)} + \underbrace{\min\{f(x), 0\}}_{f_2(x)}$$

e analogamente

$$g(x) = g_1(x) + g_2(x)$$

Quindi $f(x) \cdot g(x)$ è somma di 4 prodotti in cui i fattori hanno segno fisso.

— o — o —

ANALISI 1 — LEZIONE 129

Titolo nota 12/05/2015

$\boxed{\text{Serie numeriche}}$ ⇝ proprietà di riordinamento

Data una serie, se "permuto" i termini, cosa succede alla somma?

Formalizziamo il discorso: sia a_n una successione di numeri, e sia

$$\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$

una funzione iniettiva e surgettiva (una permutazione di $\mathbb{N}$).
Come sono legate le serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \qquad \sum_{n=0}^{\infty} a_{\sigma(n)}$$

Risposta: DIPENDE, in particolare

① Se $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| < +\infty$, cioè se $\sum a_n$ converge assolutamente, allora

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_{\sigma(n)} \qquad \forall\, \sigma \text{ perm. di } \mathbb{N}$$

② Se $\sum a_n$ converge, ma $\sum |a_n| = +\infty$, allora

per ogni $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ esiste $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ iniett. e surg. tale che

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{\sigma(n)} = \ell$$

$\boxed{\text{Idea della dim. di ②}}$ Dall'ipotesi segue subito che

$$\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \max\{a_n, 0\}}_{\text{somma termini positivi}} = +\infty \qquad \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \min\{a_n, 0\}}_{\text{somma termini negativi}} = -\infty$$

Supponiamo di voler riordinare i termini in modo che la somma faccia $\ell \in \mathbb{R}$.
Idea:

→ uso i positivi fino a quando supero ℓ (somma parz. $> \ell$)
→ poi uso i negativi fino a quando somma parz. $< \ell$
... e così via.

Ottengo infinite alternanze, quindi prima o poi uso tutti i termini. Inoltre quando supero ℓ da una parte o dall'altra l'errore è $\leq$ del più grande termine rimasto fino a quel momento, ma questo $\to 0$ perché la serie converge.

— o — o —

<u>Osservazione</u> Allo stesso modo posso renderla indeterminata, scegliendo come mi pare liminf e limsup delle somme parziali.

— o — o —

$\boxed{\text{Dim. 1}}$ Per ipotesi sappiamo che

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = S_\infty \in \mathbb{R} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| < +\infty$$

Fisso $\varepsilon > 0$ e fisso la permutazione $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Voglio dimostrare che

$$\left| \sum_{n=0}^{N} a_{\sigma(n)} - S_\infty \right| \leq \varepsilon$$

quando N è abbastanza grande.
Dall'ipotesi segue che

$$\left| \sum_{n=0}^{k} a_n - S_\infty \right| \leq \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{per ogni } k \geq K_\varepsilon$$

e

$$\sum_{n=h}^{+\infty} |a_n| \leq \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{per ogni } h \geq H_\varepsilon$$

Pongo $M_\varepsilon := \max\{k_\varepsilon, H_\varepsilon\}$.

Pongo

$N_{\varepsilon,\sigma}$ in maniera tale che

$\sigma(\{1, \ldots, N_{\varepsilon,\sigma}\}) \supseteq \{1, \ldots, M_\varepsilon\}$ (voglio che tutti i numeri da 1 a M_ε siano permutazione di $\{1, \ldots, N_{\varepsilon,\sigma}\}$)

Dato $N \geq N_{\varepsilon,\sigma}$ pongo infine

$$\underset{\text{utili}}{U_{\varepsilon,\sigma,N}} = \{n \in \{1, \ldots, N\} \text{ t.c. } \sigma(n) \in \{1, \ldots, M_\varepsilon\}\}$$

$$\underset{\text{inutili}}{I_{\varepsilon,\sigma,N}} = \{n \in \{1, \ldots, N\} \text{ t.c. } \sigma(n) \geq M_\varepsilon + 1\}$$

Allora

$$\left|\sum_{n=0}^{N} a_{\sigma(n)} - S_\infty\right| = \left|\sum_{n \in U_{\varepsilon,\sigma,N}} a_{\sigma(n)} + \sum_{n \in I_{\ldots}} a_{\sigma(n)} - S_\infty\right|$$

$$= \left|\sum_{n=1}^{M_\varepsilon} a_n + \sum_{n \in I_{\ldots}} a_{\sigma(n)} - S_\infty\right|$$

$$\leq \underbrace{\left|\sum_{n=1}^{M_\varepsilon} a_n - S_\infty\right|}_{\leq \frac{\varepsilon}{2} \text{ perché } M_\varepsilon \geq k_\varepsilon} + \left|\sum_{n \in I_{\ldots}} a_{\sigma(n)}\right|$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{n \in I_{\ldots}} |a_{\sigma(n)}|$$

tutti indici $\geq M_\varepsilon + 1$

$$\leq \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{n \geq M_\varepsilon + 1} |a_n|$$

perché $M_\varepsilon \geq k_\varepsilon$.

$$\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

— o — o —

Conseguenza Si può parlare di somma di un insieme (numerabile) di numeri reali senza precisare l'ordine in cui li sto prendendo se e solo se la somma dei valori assoluti converge.

— o — o —

Proprietà associativa per le serie

Se la serie non converge assolutamente, allora non si può fare nulla.
Se è assolutamente convergente, posso raggruppare i termini come voglio.

Enunciato Sia a_n una successione tale che $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| < +\infty$.

Siano $A_i \subseteq \mathbb{N}$ insiemi a 2 a 2 disgiunti tali che

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \mathbb{N}$$ (gli A_i sono una partizione di $\mathbb{N}$)

Allora

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{i=0}^{\infty} \underbrace{\left(\sum_{n \in A_i} a_n \right)}$$

la somma di tutti i termini con indici in A_i

↑

l'ordine in cui li sommo non conta nulla essendo assol. conv.

$\boxed{\text{Dim.}}$ Le notazioni sono scomode, ma l'idea è la stessa di prima, quindi esercizio!!!

— o — o —

ANALISI 1 — LEZIONE 130 (-4)

Titolo nota 13/05/2015

Insiemi numerici : da $\mathbb{N}$ ad $\mathbb{R}$

Def. I numeri naturali sono una terna $(\mathbb{N}, 0, s)$ dove

- $\mathbb{N}$ è un insieme,
- $0 \in \mathbb{N}$,
- $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ (brutalmente: è il successivo)

Le proprietà di s sono le seguenti (ASSIOMI DI PEANO)

(i) s è iniettiva

(ii) l'immagine di s è $\mathbb{N} \setminus \{0\}$, cioè per ogni $n \in \mathbb{N}$ con $n \neq 0$ esiste $m \in \mathbb{N}$ t.c. $s(m) = n$ (m è unico)

(iii) se un sottoinsieme $A \subseteq \mathbb{N}$ verifica
- $0 \in A$
- $\forall n \in \mathbb{N}\ [n \in A \Rightarrow s(n) \in A]$

allora per forza $A = \mathbb{N}$.

Oss. L'assioma 3 è il principio di induzione (quello classico deriva prendendo come A l'insieme degli $n \in \mathbb{N}$ per cui un certo predicato P_n è vero)

Teorema Esiste un'unica terna $(\mathbb{N}, 0, s)$ con le proprietà date.

Oss. L'unicità si intende a meno di isomorfismi, cioè se $(\boxed{\mathbb{N}}, \boxed{0}, \boxed{s})$ è un'altra terna, allora esiste un'unica funzione bigettiva

$$\varphi : \mathbb{N} \to \boxed{\mathbb{N}}$$

tale che

$$\varphi(0) = \boxed{0}$$
$$\varphi(s(n)) = \boxed{s}(\varphi(n)) \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Dim. teorema

Esistenza: deve derivare da un opportuno assioma misterioso della teoria degli insiemi

Unicità: date due terne come sopra, basta definire $\varphi : \mathbb{N} \to \boxed{\mathbb{N}}$ ponendo

$\varphi(0) = \boxed{0}$

ogni altro $n \in \mathbb{N}$ (diverso da 0) lo posso scrivere come $n = s(m)$ e a quel punto pongo

$$\varphi(n) = \boxed{s}(\varphi(m)) \qquad \forall n \neq 0$$

Si verifica facilmente che φ è iniettiva e surgettiva e che commuta con la struttura.

— o — o —

Operazioni in $\mathbb{N}$

Somma. Voglio definire $a+b$ con a e b in $\mathbb{N}$.
Si pone

- $a + 0 = a$ per ogni $a \in \mathbb{N}$
- $a + s(n) = s(a+n)$ per ogni $n \in \mathbb{N}$

(se $b = 0$ è definita dalla 1ª, se $b \neq 0$ allora $b = s(n)$ per un qualche n, e allora $a+b$ è definita dalla 2ª).

Esercizio Dimostrare che la somma è commutativa e associativa.
(hint: è una pena)

Prodotto voglio definire $a \cdot b$. Come sopra

- se $b = 0$, allora pongo $a \cdot 0 = 0$
- se $b \neq 0$, allora $b = s(n)$ e pongo $a \cdot b = a \cdot s(n) = a \cdot n + a$

Stesso esercizio di sopra: commutativa e associativa

— o — o —

<u>Definizione di $\mathbb{Z}$</u> Brutalmente $\mathbb{Z} \ni z = \underset{\mathbb{N}}{m} - \underset{\mathbb{N}}{n}$

Ufficialmente: prendo $\mathbb{N}^2$ e definisco una relazione di equivalenza ponendo

$$(m_1, n_1) \sim (m_2, n_2) \quad \text{se} \quad m_1 + n_2 = m_2 + n_1$$

$$(m_1 - n_1 = m_2 - n_2)$$

Esercizio: si tratta di una rel. di equiv.

Operazioni in $\mathbb{Z}$: $(m_1, n_1) +_{\mathbb{Z}} (m_2, n_2) = (m_1 \underset{\mathbb{N}}{+} m_2,\ n_1 \underset{\mathbb{N}}{+} n_2)$

$$m_1 - n_1 + m_2 - n_2 = (m_1 + m_2) - (n_1 + n_2)$$

$$(m_1, n_1) \cdot_{\mathbb{Z}} (m_2, n_2) = (m_1 \underset{\mathbb{N}}{\cdot} m_2 \underset{\mathbb{N}}{+} n_1 \underset{\mathbb{N}}{\cdot} n_2,\ m_1 \underset{\mathbb{N}}{\cdot} n_2 \underset{\mathbb{N}}{+} m_2 \underset{\mathbb{N}}{\cdot} n_1)$$

Esercizio: dimostrare che passano al quoziente

Esercizio: verificare le proprietà di anello di $\mathbb{Z}$

— o — o —

<u>Definizione di $\mathbb{Q}$</u> Moralmente: $\mathbb{Q} \ni q = \frac{m}{n}$ con $n \neq 0$

Prendo $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$ e definisco la relazione di equiv.

$$(m_1, n_1) \sim (m_2, n_2) \quad \text{se} \quad m_1 \underset{\mathbb{Z}}{\cdot} n_2 = m_2 \underset{\mathbb{Z}}{\cdot} n_1$$

<u>Esercizi</u>:
- → dim. che è relaz. di equiv.
- → definire le operazioni
- → dimostrare che è un campo.

— o — o —

<u>Costruzione di $\mathbb{R}$</u> La cosa più comoda è la def. assiomatica. Poi però bisogna dim. esistenza ed unicità

<u>Esistenza</u>: via sezioni di DEDEKIND (DEDEKIND CUTS)

Un numero reale è una partizione dei razionali in due sottoinsiemi A e B tali che
- $A \cup B = \mathbb{Q}$ e $A \cap B = \emptyset$
- $A \neq \emptyset$ e $B \neq \emptyset$
- $a \leq b$ per ogni $a \in A$ e ogni $b \in B$
- $\forall a \in A$ esiste $\hat{a} \in A$ tale che $a < \hat{a}$ (è come dire che A non ha max)

<u>Oss.</u> Dato A è automatico chi è B, quindi parlare di sezioni di Dedekind è equivalente a parlare di semirette sx in $\mathbb{Q}$ aperte

Pensando in termini di semirette (cioè guardando solo A)
→ la somma si definisce bene facendo $A_1 + A_2$
→ il prodotto è una pena per via dei segni
→ l'ordine è banale (è un confronto tra semirette)
→ l'assioma di continuità si riduce a fare l'unione di semirette.

— o — o —

A partire dagli assiomi dei numeri reali, si può dimostrare che $\mathbb{R}$ contiene $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$, cioè esistono applicazioni iniettive

$$i : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$$
$$i : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$$
$$i : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$$

che preservano la struttura algebrica e di ordinamento.

Come si dimostra l'unicità di $\mathbb{R}$

$\rightarrow$ si definisce l'isomorfismo nell'immagine di $\mathbb{N}$

$\rightarrow$ $\mathbb{Z}$

$\rightarrow$ $\mathbb{Q}$

$\rightarrow$ si passa a tutti i reali con il sup, perchè ogni reale è il sup di una semiretta di razionali.

— o — o —

ANALISI 1 – LEZIONE 131

Titolo nota 13/05/2015

Funzioni elementari

Potenze con esponente naturale pari

$f(x) = x^{2k}$ $\quad f: [0,+\infty) \to [0,+\infty)$

sono iniettive, surgettive, continue

→ iniettività: facile via stretta monotonia, la quale segue segue dagli assiomi di ordinamento

→ continuità: facile a partire da
- la funzione $f(x) = x$ è continua (def. $\varepsilon-\delta$)
- il prodotto di funzioni continue è continuo
- induzione su k

→ surgettività: segue da
- fatto che $f(0) = 0$ e $f(x) \to +\infty$ per $x \to +\infty$
  (prodotto di limiti o confronto $f(x) \geq x$ per $x \geq 1$)
- teorema di esistenza degli zeri che usa solo continuità della $f(x)$ e assioma di continuità via esistenza di sup/inf.

Potenze con naturali dispari x^{2k+1} : discorso analogo solo con $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

A questo p.to abbiamo che le funzioni inverse sono ben definite e continue (via continuità dell'inversa di una $f(x)$ con insieme di defin. convesso).

$\boxed{\text{Funzione esponenziale}}$ Come è definita?

Soluzioni di comodo:

① $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k$ (converge per ogni $x \in \mathbb{R}$ per assoluta convergenza + criterio radice)

② $e^x = \lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$

③ È la soluzione del problema di Cauchy $\begin{cases} u' = u \\ u(0) = 1 \end{cases}$

Soluzione da inizio corso: via equazione funzionale

Per ogni $a > 1$ (si potrà fare anche per $a = 1$ e $0 < a < 1$) cerco una funzione

$$f_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \leftarrow \text{sarà } (0, +\infty)$$

tale che

(i) $f_a(x+y) = f_a(x) \cdot f_a(y) \qquad \forall x \in \mathbb{R} \ \forall y \in \mathbb{R}$

(ii) $f_a(1) = a$

Sorpresona: non esiste un'unica funzione con queste 2 proprietà, ma quasi

Teorema Per ogni $a > 1$ esiste unica $f_a : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ con le proprietà di sopra (intese $\forall x \in \mathbb{Q}$, $\forall y \in \mathbb{Q}$).
Inoltre tale funzione è
→ continua in $\mathbb{Q}$
→ monotona crescente in $\mathbb{Q}$.

$\boxed{\text{Dim.}}$ $\boxed{\text{Passo 1}}$ Definisco $f_a(x)$ per $x \in \mathbb{N}$

$$f_a(1) = a$$
$$f_a(2) = f_a(1+1) \overset{(i)}{=} f_a(1) \cdot f_a(1) = a^2$$
$$f_a(3) = f_a(2+1) = f_a(2) \cdot f_a(1) = a^2 \cdot a = a^3$$

per induzione $f_a(n+1) = f_a(n) \cdot a = a^n \cdot a$

$$f_a(0) = f_a(0+0) \underset{(i)}{=} f_a(0) \cdot f_a(0)$$

quindi $f_a(0)$ può essere solo 0 oppure 1 (risolve $x^2 = x$)
Se fosse $f_a(0) = 0$ avrei però
$a = f_a(1) = f_a(1+0) = f_a(1) \cdot \underset{0}{\underset{\shortparallel}{f_a(0)}} = 0$ $\rightsquigarrow$ assurdo

Quindi $f_a(0) = 1$.

Oss. bisognerebbe qui dimostrare che così definita risolve la (i) per ogni x e y in $\mathbb{N}$.

$\boxed{\text{Passo 2}}$ Definisco $f_a(x)$ per $x \in \mathbb{Z}$.
Se $x = -n$ per un certo $n \in \mathbb{N}$

$$1 = f_a(0) = f_a(n + (-n)) \underset{(i)}{=} \underset{a^n}{\underset{\shortparallel}{f_a(n)}} \cdot f_a(-n)$$

da cui
$$f_a(-n) = \frac{1}{f_a(n)} = \frac{1}{a^n}$$

Oss. Bisognerebbe fare come sopra

$\boxed{\text{Passo 3}}$ Passo a $x = \frac{m}{n}$ con $m \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$

$$a^m = f_a(m) = f_a\Big(\underbrace{\frac{m}{n} + \dots + \frac{m}{n}}_{n \text{ volte}}\Big) = f_a\Big(\frac{m}{n}\Big) \cdot \ldots \cdot f_a\Big(\frac{m}{n}\Big)$$

estensione di (i) ad n addendi
che si dim. per induzione

$$= \Big[f_a\Big(\frac{m}{n}\Big)\Big]^n$$

Quindi $f_a\left(\frac{m}{n}\right) = \sqrt[n]{a^m}$

<u>Oss.</u> La solita.

$\boxed{\text{Passo 4}}$ Monotonia in $\mathbb{Q}$. Devo dim. che

$$f_a(x+y) > f_a(x) \qquad \forall x \in \mathbb{Q}, \ \forall y \in \mathbb{Q} \text{ con } y > 0$$

$\overset{\text{(i)}}{=}$ $f_a(x) \cdot f_a(y)$

Posso dividere e ottengo che è vera $\Leftrightarrow$ $f_a(y) > 1$ per ogni $y > 0$

Questo segue ponendo $y = \frac{m}{n}$ e osservando che

$f_a(y) = \sqrt[n]{a^m} > 1$ se m ed n sono positivi per le propr. delle radici.

$\boxed{\text{Passo 5}}$ Continuità su $\mathbb{Q}$. Fisso $x_0 \in \mathbb{Q}$ e prendo $h \in \mathbb{Q}$

$$|f_a(x_0+h) - f_a(x_0)| = |f_a(x_0) \cdot f_a(h) - f_a(x_0)|$$

$$= |f_a(x_0)| \cdot \underbrace{|f_a(h) - 1|}_{\substack{\text{voglio che sia piccolo} \\ \text{quando } h \text{ è piccolo}}}$$

Devo dimostrare che $f_a(h) \to 1$ quando $h \to 0$.

Osservo che per la monotonia mi basta dim. che $f_a\left(\frac{1}{n}\right) \to 1$.
Il fatto che $f_a\left(\frac{1}{n}\right) \to 1$ è equiv. a dim. che

$$\sqrt[n]{a} \to 1 \quad \text{per } n \to +\infty$$

(e questo si fa con solo BERNOULLI)

— o — o —

A questo punto si può estendere in modo unico la funzione esponenziale a tutto $\mathbb{R}$ in modo che rimanga monotona

$$f_a(x) = \sup\{f_a(q) : q \in \mathbb{Q} \text{ e } q < x\}$$

Lo stesso ragionamento di sopra mostra che continua a verificare la (i) ed è monotona e continua.
A quel p.to è surgettiva per di dimostrare che tende a $+\infty$ e 0 dalle due parti. Questo si fa con Bernoulli.

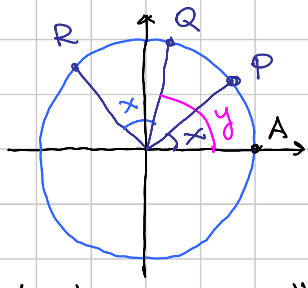
— o — o —

Definizione di $\sin x$ e $\cos x$

Comodi: ① somma delle serie di potenze
② soluzioni di $u'' = -u$ con opportuni dati iniziali

Percorso o quasi: equazione funzionale, imponendo

$S^2(x) + C^2(x) = 1$ ← stare nella circonf.
$S(x+y) =$
$C(x+y) =$ } quello che ci si aspetta



$\text{dist}(A,P) = \text{dist}(Q,R)$

Fissato un periodo a, esiste un'unica soluzione non ovvia che è a periodica, in 0 vale $(1,0)$ e in $\frac{a}{4}$ vale $(0,1)$

— o — o —

ANALISI 1 - LEZIONE 132 (-2)

Titolo nota 15/05/2015

Dimenticanze del passato

$\boxed{1^a\text{: Dim. di Hôpital nel caso } x_0 = \pm\infty}$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} \underset{\text{pongo } y=\frac{1}{x}}{=} \lim_{y\to0^+} \frac{f\left(\frac{1}{y}\right)}{g\left(\frac{1}{y}\right)} \underset{\substack{\text{se posso}\\\text{usare Hôp}}}{=}$$

$$= \lim_{y\to0^+} \frac{f'\left(\frac{1}{y}\right)\cancel{\left(-\frac{1}{y^2}\right)}}{g'\left(\frac{1}{y}\right)\cancel{\left(-\frac{1}{y^2}\right)}} \underset{\substack{\text{cambio}\\\text{inverso}}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Quindi la dim. si riduce al caso 0^+ o 0^-.

$\boxed{2^a\text{: Dim. derivata funzione composta}}$

Enunciato: $f(x)$ derivabile in x_0

$g(x)$ derivabile in $y_0 = f(x_0)$

Allora $g(f(x))$ è derivabile in x_0 e vale

$$\frac{d}{dx}\, g\circ f\,(x_0) = g'(f(x_0))\cdot f'(x_0)$$

Dim. brutale Rapporto incrementale

$$\frac{g(f(x_0+h)) - g(f(x_0))}{h} = \frac{g(f(x_0+h)) - g(f(x_0))}{\underbrace{f(x_0+h)}_{y} - \underbrace{f(x_0)}_{y_0}} \boxed{\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}}$$

$$\boxed{\frac{g(y)-g(y_0)}{y-y_0}} \to g'(y_0) = g'(f(x_0)) \qquad \boxed{\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}} \to f'(x_0)$$

Problema: aver diviso per $f(x_0+h) - f(x_0)$, che potrebbe essere 0.

Oss. Se $f'(x_0) \neq 0$, allora la dim. di sopra funziona, perché per permanenza del segno avremo $f(x_0+h) - f(x_0) \neq 0$ per h vicino abbastanza vicino a 0.

Dim. funzionante 1 Definisco la funzione

$$R(y) = \begin{cases} \dfrac{g(y) - g(y_0)}{y - y_0} & \text{se } y \neq y_0 \\ g'(y_0) & \text{se } y = y_0 \end{cases}$$

Osservo che $R(y)$ è definita almeno in un intorno di y_0 ed è continua in y_0 (è equivalente alla derivabilità di $g(y)$ in $y = y_0$).
Ora

$$\frac{g(f(x_0+h)) - g(f(x_0))}{h} = R(f(x_0+h)) \cdot \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

Infatti:
- se $f(x_0+h) - f(x_0) \neq 0$ segue come prima
- se $f(x_0+h) = f(x_0)$ diventa $0 = 0$.

Calcolo il limite del LHS usando il prodotto di limiti.
Il primo termine al RHS $\to g'(y_0)$ il secondo a $f'(x_0)$.

— o — o —

Dim. funzionante 2 Uso il lemma della sotto-sotto.

devo dimostrare che

$$\lim_{h \to 0} \underbrace{\boxed{\frac{g(f(x_0+h)) - g(f(x_0))}{h}}}_{= \varphi(h)} = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$$

Il lemma mi dice che basta verificare che ogni successione $h_n \to 0$ ha una sotto-successione h_{n_k} tale che

$$\varphi(h_{n_k}) \to g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$$

Prendiamo ora una qualunque succ. $h_n \to 0$. Questa avrà una sottosuccessione che verifichi una delle seguenti due proprietà

- caso 1: $f(x_0 + h_{n_k}) \neq f(x_0)$ per ogni k. In questo caso divido come nella dim. sbagliata e concludo.
- caso 2: $f(x_0 + h_{n_k}) = f(x_0)$ per ogni k.

  In questo caso $\varphi(h_{n_k}) = 0$, quindi LHS $\to 0$, ma anche

  $$f'(x_0) = \lim_{k \to +\infty} \frac{f(x_0 + h_{n_k}) - f(x_0)}{h_{n_k}} = 0,$$

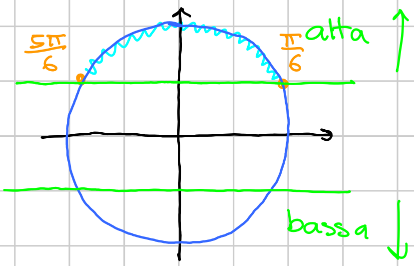
  quindi anche RHS $\to 0$.

— o — o —

<u>Esercizio</u> (versione soft) Dimostrare che $\lim_{n \to +\infty} \sin n$ N.E.

NON pensare nemmeno: $\lim_{x \to +\infty} \sin x$ N.E., quindi $\lim_{n \to +\infty} \sin n$ N.E.

Devo trovare due sottosuccessioni con 2 comportamenti diversi.

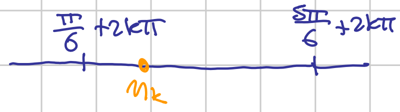


Idea: il p.to della circ. corrispondente ad n radianti sta infinite volte in zona alta e infinite volte in zona bassa.

<u>Lemmino</u> Per ogni $k \in \mathbb{N}$ esiste n_k tale che

$$\frac{\pi}{6} + 2k\pi \le n_k \le \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \qquad (\text{e quindi } \sin n_k \ge \tfrac{1}{2})$$

$\boxed{\text{Dim.}}$ Basta osservare che la finestra ha ampiezza $\frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{6} = \frac{2\pi}{3} > 2$



Perché? Considero l'insieme

$$\left\{ n \in \mathbb{N} : n \geq \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \right\}$$

↑ k è fissato

L'insieme è non vuoto per la proprietà archimedea. Sia i_k l'inf. Allora $n_k = i_k - 1$ sta nella zona

Se stesse sopra...,

Se stesso sotto ..., □

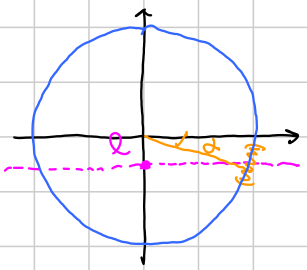
Allo stesso modo si dimostra che esiste $n_k \to +\infty$ che sta nella zona sotto.

— o — o —

<u>Versione Hard</u> $\liminf_{n\to+\infty} \sin n = -1$ $\limsup_{n\to+\infty} \sin n = 1$

o ancora meglio: per ogni $\ell \in [-1,1]$ esiste $n_k \to +\infty$ tale che

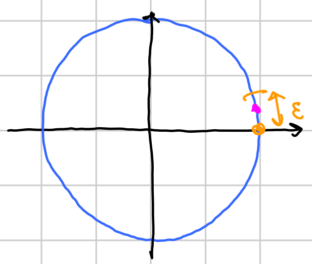
$$\sin n_k \to \ell$$



Si riduce a dimostrare che per ogni $\varepsilon > 0$, la successione n, vista modulo 2π, entra in una finestra di ampiezza ε centrata in un pto α

<u>Fatto misterioso</u> Per ogni $\varepsilon > 0$ esistono infiniti interi n_k tali che

$$2k\pi < n_k < 2k\pi + \varepsilon$$



Supponendo per buono il fatto misterioso, si conclude.

Basta considerare un k_0 di questo tipo e i suoi multipli

$$k_0,\ 2k_0,\ 3k_0,\ \ldots,\ mk_0,\ \ldots$$

Data una finestra di ampiezza ε a dx e sx intorno ad un valore α, questi finiranno infinite volte nella finestra.

— o — o —

A sua volta il fatto misterioso è equivalente a scrivere

$$\pi < \frac{m_k}{2^k} < \pi + \frac{\varepsilon}{2^k}$$

che è equivalente a

$$\left|\pi - \underbrace{\boxed{\frac{m_k}{2^k}}}_{\in\mathbb{Q}}\right| < \frac{\varepsilon}{2^k}$$

cioè ad approssimare π con una frazione commettendo un errore minore di ε diviso il denominatore.

Lemma Se $\alpha \notin \mathbb{Q}$, allora per ogni $m \geq 1$ esiste una frazione $\frac{p}{q}$ tale che

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \leq \frac{1}{mq}$$

Preso $\frac{1}{m} < \varepsilon$, questo dimostra il fatto misterioso

Esempio $\pi = 3{,}14159\ldots$ si può approssimare con $\frac{22}{7} = 3{,}1428\ldots$

In generale si possono trovare approssimazioni dell'ordine di $\frac{1}{q^2}$.

Esercizio per casa ☺ Dimostrare che $\sin(n^2)$ non ha limite e calcolare liminf e limsup (problema forse aperto)

— o — o —

ANALISI 1 – LEZIONE 133 ☺

Titolo nota 15/05/2015

$\boxed{\text{Esercizio 1}}$ Dimostrare che $e \notin \mathbb{Q}$

$\boxed{\text{Dim.}}$ Uso la caratterizzazione come somma di una serie.
Supponiamo per assurdo che

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = \frac{a}{b} \qquad \text{con } a \text{ e } b \text{ in } \mathbb{N}$$

Moltiplico LHS e RHS per $b!$. Ottengo

$$e \cdot b! = \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{b!}{n!}}_{\text{intero} + \sum_{n=b+1}^{\infty} \frac{b!}{n!}} = a \cdot (b-1)! \in \mathbb{Z}$$

tutti i termini con $n \leq b$ sono diventati interi

quindi in particolare

$$\sum_{n=b+1}^{\infty} \frac{b!}{n!} \in \mathbb{Z}$$

Ora l'idea è che la sommatoria è positiva e minore di 1, il che è assurdo.

$$\sum_{n=b+1}^{\infty} \frac{b!}{n!} = \frac{1}{(b+1)} + \frac{1}{(b+1)(b+2)} + \frac{1}{(b+1)(b+2)(b+3)} + \dots$$

$$\leq \frac{1}{b+1} + \frac{1}{(b+1)^2} + \frac{1}{(b+1)^3} + \dots$$

$$\overset{\text{geometrica}}{=} \frac{1}{b+1} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{b+1}} = \frac{1}{b+1} \frac{b+1}{b} = \frac{1}{b} < 1 \quad \text{se } b > 1$$

Ora $b > 1$ perchè altrimenti $e \in \mathbb{N}$, ma $2 < e < 3$. □

Oss. Quello che rende facile la dim. è il fatto che e è la somma di una serie che converge molto rapidamente.

$\boxed{\text{Esercizio 2}}$ Studiare il comportamento della serie

$$\sum_{n\in A} \frac{1}{n} \qquad \sum_{n\in A} \frac{1}{n^\alpha}$$

dove $A = \{ n \geq 1 : n$ si scrive in base 10 senza usare la cifra 7 $\}$

$\boxed{\text{Sol.}}$ La prima converge, che è come dire che sto "saltando" molti numeri.

Provo a fare una maggiorazione. Fisso un numero k di cifre. Quanti sono i numeri di k cifre che si scrivono senza usare il 7?

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{la cifra a sx} \\ \text{non può essere} \\ \text{0 opp. 7}}}{8} \cdot \underbrace{9 \cdot \ldots \cdot 9}_{\substack{\uparrow \\ \text{le altre cifre} \\ \text{hanno 9 possib.}}} = 8 \cdot 9^{k-1}$$

Cosa posso dire della somma dei loro reciproci?

$$\leq \underbrace{8 \cdot 9^{k-1}}_{\substack{\uparrow \\ \text{quanti sono} \\ \text{i numeri}}} \cdot \underbrace{\frac{1}{10^{k-1}}}_{\substack{\uparrow \\ \text{più grande reciproco} \\ \text{fra quelli di } k \text{ cifre.}}}$$

Quindi
$$\sum_{n\in A} \frac{1}{n} \leq \sum_{k=1}^{\infty} 8 \cdot \frac{9^{k-1}}{10^{k-1}} = 8 \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{9}{10}\right)^{k-1} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{geometrica}}}{<} +\infty$$

Osservazione Posso raggruppare i termini a seconda del numero di cifre perchè sono tutti positivi.

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{monotona crescente}}}{S_n} \to S_\infty \iff \text{una qualunque s. succ.} \to S_\infty$$

$\boxed{\text{Con } \alpha}$ Arrivo alla stima

$$\sum_{n \in A} \frac{1}{n^\alpha} \leq 8 \sum_{k \geq 1}^{\infty} \left(\frac{9}{10^\alpha}\right)^{k-1}$$

quindi si ha convergenza se $10^\alpha > 9 \iff \alpha > \log_{10} 9$

Cosa succede per $\alpha < \log_{10} 9$? Posso fare la stima inversa

somma reciproci con k cifre $\geq 8 \cdot 9^{k-1} \frac{1}{10^{k\alpha}}$

quindi $$\sum_{n \in A} \frac{1}{n^\alpha} \geq \frac{8}{9} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{9}{10^\alpha}\right)^k = +\infty$$

Questo dimostra anche il caso $\alpha = \log_{10} 9$

— o — o —

Esercizio 3 $\displaystyle\sum_{n \in P} \frac{1}{n}$ $\qquad P$ = primi

$\boxed{\text{Dim 1}}$ Brutal mode via prodotto di Eulero

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \prod_{p \in P} \left(1 + \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p^3} + \dots\right)$$

$$= \prod_{p \in P} \frac{1}{1 - \frac{1}{p}}$$

Prendo i logaritmi

$$\log\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\right) = \sum_{p \in P} \log\left(\frac{1}{1-\frac{1}{p}}\right) = -\sum_{p \in P} \log\left(1 - \frac{1}{p}\right)$$

$$\underset{\text{Taylor}}{\sim} \sum_{p \in P} \frac{1}{p}$$

$\boxed{\text{Dim 2: ERDÖS}}$ Supponiamo per assurdo che $\sum \frac{1}{p} < +\infty$

Allora numerati i primi $p_1, p_2, \dots, \dots,$ avremo che $\exists k$ t.c.

$$\sum_{n \geq k+1} \frac{1}{p_n} < \frac{1}{2}$$ basta qualunque cosa < 1.

Chiamo $p_1, \dots, p_k$ i primi piccoli
Chiamo $p_{k+1}, \dots$ i primi grandi

Per ogni $n \in \mathbb{N}$ definisco

$A_n = \{ i \in \{1, \dots, n\}$ che hanno solo primi piccoli $\}$
$B_n = \{ i \in \{1, \dots, n\}$ che hanno almeno un primo grande $\}$

Ovviamente $|A_n| + |B_n| = n$
Dimostrerò invece che

$$|B_n| \leq \frac{n}{2} \quad \text{e} \quad |A_n| = \underbrace{O(\log_2^k n)}_{\leq \frac{n}{4} \text{ definitiv.}}$$

→ Dimostro la stima per $|A_n|$. Ogni elemento di A_n si scrive nella forma

$$p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{a_k}$$

Tutti gli esponenti sono più piccoli di $\log_{p_i} n \leq \log_2 n$

Avendo k esponenti tutti $\leq \log_2 n$, per forza le possibilità sono meno di $(\log_2 n)^k$

→ Dimostro la stima su B_n osservando che

$$B_n = \bigcup_{i \geq k+1} \{\text{numeri divisibili per } p_i\}$$

$$|B_n| \leq \sum_{i \geq k+1} |\{\text{numeri divisibili per } p_i\}| \leq \sum_{i \geq k+1} \frac{n}{p_i}$$

Quindi

$$|B_n| \leq n \sum_{i \geq k+1} \frac{1}{p_i} \leq \frac{n}{2}.$$

— o — o —

Oss. La prima dim. aggiustata conduce alla somma $\log(\log n)$
La seconda non è costruttiva, quindi non permette
di stimare come divergono le somme parziali

— o — o —

FINE CORSO !!!