

**ESERCIZI DEL CORSO DI GEOMETRIA I
(31 MARZO 2001)**

MICHELE GRASSI

Esercizio 1

Sia $V = \mathbb{R}[x]_{\leq 3}$, e sia $f : V \rightarrow V$ l'applicazione lineare (dipendente dal parametro reale m) data da:

$$f(p(x)) = mx^2 \frac{d^2 p(x)}{dx^2} + \frac{dp(x)}{dx} + p(x)$$

- a) Si calcoli il polinomio caratteristico di f
- b) Si discuta la diagonalizzabilità di f al variare del parametro m .

Esercizio 2

Indicando con I la matrice identità 2×2 ,

$$S = \{M \in M_2(\mathbb{Q}) \mid M^2 = 2I\}$$

- a) Si costruisca un esempio di una $M \in S$.
- b) Si dimostri che ogni $M \in S$ è invertibile.
- c) Si dimostri che ogni $M \in S$ non è diagonalizzabile sul campo \mathbb{Q} .
- d) Si dimostri che ogni $M \in S$ è diagonalizzabile sul campo \mathbb{R} .

Esercizio 3

Siano M, N due matrici 5×5 su \mathbb{R} tali che $MN = NM$, e si assuma che $Me_i = (\delta_{mi} + i)e_i$ per $i = 1, 2, 3, 4, 5$.

- a) Si dimostri che N è necessariamente una matrice diagonale quando $m = 0$.
- b) Si costruisca un esempio di N non diagonale quando $m = 1$.
- c) Si descriva l'insieme degli $m \in \mathbb{R}$ per cui si può dedurre che N è diagonale.