ESERCIZI PREPARATORI DI ALGEBRA PER LA PROVA DEL 5 APRILE 2005

MICHELE GRASSI

I seguenti esercizi sono solo **ALCUNI ESEMPI** possibili. Ovviamente gli esercizi della prova intermedia potranno essere di tipo diverso.

1. Polinomi

0) Si calcoli il prodotto dei polinomi $X^3 + 3x^2 + 5x - 1$ e $x^4 - x^3 + 2x^2 + x + 2$.
1) Si calcoli il massimo comun divisore dei polinomi $p(x) = x^2 - 3x + 2$ e $q(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2$ usando l'algoritmo di euclide
2) Si calcoli il massimo comun divisore dei polinomi $p(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$ e $q(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2$ usando l'algoritmo di euclide
3) Sapendo che 1 è radice del polinomio $p(x) = x^3 + x^2 - x - 1$, si scriva il polinomio come prodotto di polinomi di grado uno (*Suggerimento*: se 1 è radice, allora il polinomio è divisibile per $x - 1$, cioè esiste un polinomio $q(x)$ tale che $p(x) = (x - 1)q(x)$. Il quoziente $q(x)$ della divisione fra $p(x)$ e $x - 1$ è un polinomio di grado due, di cui si possono trovare le radici r_1, r_2 usando la formula risolutiva. Sapendo che le radici di $q(x)$ sono r_1 e r_2 e che $q(x)$ è monico, si può scrivere $q(x) = (x - r_1)(x - r_2)$ e quindi $p(x) = (x - 1)(x - r_1)(x - r_2)$)

2. Spazi vettoriali

0) Si dimostri che l'insieme V dei vettori di $\mathbb{R}^3$ di coordinate x, y, z tali che $2x + y - z = 0$ costituisce uno spazio vettoriale (*Suggerimento* Basta dimostrare che V è un sottospazio di $\mathbb{R}^3$)
1) Si dimostri che l'insieme

$$\beta = \{e_2 + 2e_3, e_1 + e_3, e_1 + e_2\}$$

è una base di $\mathbb{R}^3$ (*Suggerimento* Poichè β contiene tre vettori, per dimostrare che è una base basta dimostrare che è indipendente, cioè che $a(e_2 + 2e_3) + b(e_1 + e_3) + c(e_1 + e_2) = 0$ implica $a = b = c = 0$. Per dimostrare questo basta raccogliere i coefficienti di e_1, e_2 ed e_3 nell'espressione precedente ed imporre che siano tutti zero. In questo modo ci si è ridotti a dimostrare che l'unica soluzione del sistema lineare

$$\begin{cases} b + c = 0 \\ a + c = 0 \\ 2a + b = 0 \end{cases}$$

è la soluzione banale, e questo si può fare procedendo per sostituzione)
2) Si completi l'insieme $\alpha = \{e_1 - e_2 + e_3\}$ ad una base di $\mathbb{R}^3$ utilizzando vettori della base β dell'esercizio precedente.(*Suggerimento* si devono aggiungere due vettori di β a α in modo da ottenere una base. Ci sono solo tre modi di farlo, e per un

risultato della teoria almeno uno di questi modi deve funzionare)
3) a) Si estragga un insieme indipendente massimale dall'insieme di vettori di $\mathbb{R}^4$

$$\alpha = \{e_1 + 2e_2 - e_4, e_2 + e_3 - e_4, e_1 - e_3 + 2e_4, 2e_1 + 3e_2\}$$

b) Qual'è la dimensione di $Span(\alpha)$?

3. Applicazioni lineari

0) Si dimostri che la funzione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ data da

$$f(xe_1 + ye_2 + ze_3) = \begin{pmatrix} x - y \\ y + z \end{pmatrix}$$

è una applicazione lineare.
1) Sia L_A l'applicazione lineare da $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^3$ associata alla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Si calcoli $L_A(e_1 - 3e_2)$.
b) Si trovi $Ker(L_A)$
2) Sia L_A l'applicazione lineare da $\mathbb{R}^3$ a $\mathbb{R}^3$ associata alla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

a) Si trovi una base di $Im(L_A)$ (*Suggerimento* Un insieme di generatori di $Im(L_A)$ è dato dalle colonne di A. Per trovare una base basta quindi estrarre un insieme indipendente massimale da questo insieme di generatori)
b) Si calcoli $dim(Ker(L_A))$ (*Suggerimento* Dal punto *a* conosciamo $dim(Im(L_A))$, e quindi ci possiamo calcolare $dim(Ker(L_A))$ usando la formula sulla dimensione che dice $dim(Ker(L_A)) = 3 - dim(Im(L_A))$)