

COMPITO DI ANALISI del 3 febbraio 2005

NOME (scrivere stampatello):

COGNOME (scrivere stampatello):

NUMERO DI MATRICOLA:

NUMERO DI RIGA:

(la prima riga è quella più vicina alla cattedra)

NUMERO DI COLONNA:

(la prima colonna è quella più vicina alla porta)

Se il numero di riga è pari, sia $v = 0$, mentre se è dispari sia $v = 1$

Se il numero di colonna è pari, sia $w = 0$, mentre se è dispari sia $w = 1$

(esempio: se il numero di riga è 7 e il numero di colonna è 4, si ha $v = 1$ e $w = 0$);

Chi fa solo una parte ha **1h 30m** minuti di tempo; chi fa due parti ha **2h 40m** di tempo e chi fa tre parti ha **3h** di tempo.

PRIMA PARTE

Esercizio 1

Si dimostri per induzione su $n \in \mathbb{N}$ che per $a, b \in \mathbb{R}^+$ si ha

$$(a + b + w + 2)^{(v+1)+n} \geq a^{(v+1)+n} + b^{(v+1)+n} + (w + 2)^{(v+1)+n}$$

Esercizio 2

Si calcoli (indicando tutti i passaggi fondamentali della deduzione) l'integrale

$$\int_{v-1}^{2w+2} ((1-v)\sin(x) + v\cos(x) + (1-w)x^2 + wx^3) dx$$

Esercizio 3

a) Si calcoli (indicando tutti i passaggi fondamentali della deduzione) la lunghezza dell'insieme

$$A = [v - 5, v] \cup [w - 2, 1] \cup (2, w + v + 3)$$

b) Si calcoli (indicando tutti i passaggi fondamentali della deduzione) la lunghezza dell'insieme

$$B = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$$

Esercizio 4

Si calcoli (indicando tutti i passaggi fondamentali della deduzione) l'integrale

$$\int_{-1-v}^{3-v} \left((2+v)\chi_{[2-2v, 4-v]}(x) + (2+v)x^{(3-v)} \right) dx$$

SECONDA PARTE

Esercizio 5

Si calcoli (indicando tutti i passaggi fondamentali della deduzione) il limite

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(v \frac{(3+w)n^3 + n\sin(n+w)}{n^2\cos(n-w) + (2-w)n^3} + (1-v) \frac{(5-w)n^2 + n\cos(n+w)}{\sin(n-w) + (2+w)n^2} \right)$$

Esercizio 6

Si calcoli (indicando tutti i passaggi fondamentali della deduzione) il limite

$$\lim_{x \rightarrow 2+v} (v \cos(x-2w) + (1-v) \sin(x+2w)) x^{5-v-w} |x-v|$$

Esercizio 7

Sia $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita come $f(x) = (x+1)^{2+v} \cos(x) e^{(w+1)x}$ per $x \geq 0$, e $f(x) = (x+1)^{3-v}$ per $x < 0$.

- a) Si dimostri che f è una funzione continua in tutto \mathbb{R} .
 b) Si determini se f è una funzione derivabile in tutto \mathbb{R} .

Esercizio 8

Si calcoli la derivata in 1 della funzione

$$f(x) = e^{\cos(x^{2+v})} \tan(x+2+w) + \log(3e^{(w+3)\sin(x)} - v + 2)$$

TERZA PARTE**Esercizio 9**

Sia $\{a_n\}$ la successione di numeri interi definita ricorsivamente come:

$$a_0 = v + 1, \quad a_1 = w + 1, \quad a_{n+1} = a_n + a_{n-1} \quad \text{per } n \geq 2$$

Si dimostri per induzione che $a_n \geq n$ per tutti gli $n \in \mathbb{N}$.

Esercizio 10

Si dimostri che la funzione

$$f(x) = (w \cos((2+v)x) + (1-w) \sin((3-v)x)) e^{w \sin((2+v)x) + (1-w) \cos((3-v)x)}$$

è integrabile sull'intervallo $[v, 2+w]$ e se ne calcoli l'integrale

Esercizio 11

Si calcoli il polinomio di Taylor di ordine 2 centrato in -1 della funzione

$$f(x) = v \cos(e^{(w+2)x}) + (1-v) \sin(\log(x^2 + 1))$$

Esercizio 12

Si trovino tutti i numeri complessi immaginari puri (cioè con parte reale uguale a zero) che hanno come norma la somma delle norme dei due numeri complessi radici del polinomio $x^2 - 2(v+1) + (v+1)^2 + (w+1)^2$.