COMPITO DI ANALISI MATEMATICA DELL'8 GENNAIO 2004

DOCENTE: MICHELE GRASSI

Nome:
Numero di matricola:
Chi vuole usare almeno un esonero (ottenuto con i compitini) deve consegnare entro due ore dall'inizio. Gli esercizi con un asterisco sono più difficili ed è quindi meglio farli solo dopo avere concluso gli altri.

Prima parte (relativa al materiale svolto prima del primo compitino):

(1) Si dimostri per induzione che per tutti gli $n \in \mathbb{N}$ vale l'equazione:

$$1 + \sum_{k=0}^{n} 2^k = 2^{n+1}$$

(2) Sia $f : [0,4] \to \mathbb{R}$ la funzione data da $f(x) = [x^2]$ (parte intera di x^2).
a) Si dimostri che f è a scala sull'insieme di definizione.
b) Si calcoli l'integrale

$$\int_0^4 f(x)dx$$

Seconda Parte (relativa al materiale svolto fra il primo e il secondo compitino):

(1) Sia $f(x) = e^x cos(x)$.
a) Si calcoli il polinomio di Taylor $p(x)$ di ordine 3 della funzione $f(x)$ centrato in 0.
b) Si calcoli il valore della derivata seconda di p in 1.

(2) Si calcoli l'integrale (mostrando i passaggi intermedi del calcolo)

$$\int_1^e \frac{1}{x} dx$$

(3) Sia $f : [1,3] \to \mathbb{R}$ data da $f(x) = x^3 - 2x^2 + 2x + 2$. Si trovi un punto $c \in (1,3)$ tale che $2f'(c) = f(3) - f(1)$.

(4) * Si calcoli l'integrale (mostrando i passaggi intermedi del calcolo)

$$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

Terza parte (esercizi più teorici, utili se si è ottenuta l'ammissione all'orale con le prime due parti o con i compitini):

(1) Sia $f : [1, e^2] \to \mathbb{R}$ data da $f(x) = log(x)$.
a) Si dimostri che $f \geq 0$.
b) Si dimostri che $f \leq 2$.
Sia $g : [1, e^2] \to \mathbb{R}$ data da $g(x) = [f(x)]$ (parte intera di $f(x)$).
c) Si dimostri che $g \leq f$.
d) Si dimostri che g è una funzione a scala su $[0, e^2]$.
e)* Si usino i due punti precedenti per dare una stima dal basso del numero

$$\int_0^{e^2} f(x) dx$$

(2) Sia $\mathcal{S}$ l'insieme delle funzioni $f : [1, 2] \to \mathbb{R}$ del tipo $f(x) = e^{\alpha x}$ al variare di α in $\mathbb{R}$:

$$\mathcal{S} = \{f : [1, 2] \to \mathbb{R} \mid f(x) = e^{\alpha x}, \ \alpha \in \mathbb{R}\}$$

a) Si dimostri che il prodotto di due funzioni di $\mathcal{S}$ è ancora una funzione di $\mathcal{S}$.
b) Si dimostri che (con l'ordinamento naturale delle funzioni) $\mathcal{S}$ è un insieme totalmente ordinato.
c)* Si dimostri che non è sempre vero che la somma di elementi di $\mathcal{S}$ è un elemento di $\mathcal{S}$.

(3) a) Si calcoli (mostrando i passaggi intermedi) il valore dell'espressione

$$\sum_{k=0}^{3} 2^k \binom{3}{k}$$

b)* Si dimostri che per ogni $n \in \mathbb{N}$ vale

$$\sum_{k=0}^{n} 2^k \binom{n}{k} = 3^n$$