Ideali primi

(F.Lazzeri; Pisa, dicembre 1999)

Sia A l'anello delle funzioni differenziabili a valori reali su una varietà compatta X. Vale una sorta di nullstellensatz: se P è un ideale proprio in A, allora esiste almeno un $x \in X$ in cui ogni elemento di A si annulla. Anzi è abbastanza facile scoprire che X coincide completamente con lo spettro massimale di A , ad esempio come spazio topologico. Per quanto riguarda gli ideali primi, ci si potrebbe aspettare che essi corrispondano ai sottospazi irriducibili. Essendo ogni chiuso di X un luogo di zeri di qualche elemento di A, i soli chiusi irriducibili sono costituiti da un solo punto; ci si potrebbe quindi aspettare che i soli ideali primi siano quelli determinati dai punti, ossia quelli massimali. Mostreremo invece che se X ha dimensione positiva esistono ideali primi non massimali.

Sia $\mathcal{F}$ una famiglia non vuota di chiusi di X avente le seguenti proprietà:
1) $F, G \in \mathcal{F} \Rightarrow F \cap G \in \mathcal{F}$
2) $F \subset G$ chiusi, $F \in \mathcal{F} \Longrightarrow G \in \mathcal{F}$

Per $f, g \in A$ si hanno le relazioni:

$$(f+g)^{-1}(0) \supset f^{-1}(0) \cap g^{-1}(0) \quad \text{e} \quad (f \cdot g)^{-1}(0) = f^{-1}(0) \cup g^{-1}(0)$$

Di conseguenza se la famiglia $\mathcal{F}$ soddisfa le condizioni precedenti, allora $P(\mathcal{F}) = \{f \in A \ : \ f^{-1}(0) \in \mathcal{F}\}$ è un ideale proprio di A.
Esso è primo se e solo se verifica:
3) F, G chiusi in X con $F \cup G \in \mathcal{F} \Longrightarrow F \in \mathcal{F}$ o $G \in \mathcal{F}$.
Infine esso non sarà massimale se verifica la condizione:
4) ogni elemento $F \in \mathcal{F}$ ha cardinalità infinita.

Sia $\mathcal{P}$ la famiglia di tutte le famiglie $\mathcal{F}$ di chiusi di X soddisfacienti le condizioni 1) , 2) e 4) ; ad esempio se F è un dato chiuso di X costituito da infiniti punti, la famiglia $\mathcal{F}$ dei chiusi che contengono F è di tale tipo.
La famiglia $\mathcal{P}$ è semiordinata dall'inclusione: se $(\mathcal{F}_i)_{i \in I}$ è una catena in $\mathcal{P}$, $\mathcal{F} = \bigcup_{i \in I} \mathcal{F}_i$ appartiene ad $\mathcal{P}$. Quindi per il lemma di Zorn esiste in $\mathcal{P}$ un elemento massimale $\mathcal{F}$. Mostriamo che $\mathcal{F}$ verifica 3). Infatti siano F, G chiusi in X con $F \cup G \in \mathcal{F}$ e supponiamo per assurdo $F \notin \mathcal{F}$ e $G \notin \mathcal{F}$. Allora $\mathcal{I}_F = \{$chiusi in X contenenti una intersezione $G \cap H$ con $H \in \mathcal{F}\}$ e $\mathcal{I}_G = \{$chiusi in X contenenti una intersezione $G \cap H$ con $H \in \mathcal{F}\}$ sono

famiglie di chiusi strettamente più grandi di $\mathcal{F}$ e che quindi non possono appartenere a $\mathcal{P}$. Siccome soddisfano entrambi 1) e 2) ne segue che esiste $H_1 \in \mathcal{F}$ con $F \cap H_1$ finito e $H_2 \in \mathcal{F}$ con $G \cap H_2$ finito. Posto allora $H = H_1 \cap H_2$ si ha che $F \cap H$ e $G \cap H$ sono finiti, quindi $(F \cup G) \cap H$ è finito il che è una contraddizione perché $F \cup G$ e H stanno in $\mathcal{F}$. Quindi $\mathcal{F}$ verifica 3) e perciò induce un ideale primo che non è massimale perché verifica la 4).