Sulla normalizzazione di spazi di Stein

(F.Lazzeri; Pisa, marzo 2001)

Si scelgano genericamente $N-1$ forme quadratiche $Q_1, ..., Q_{N-1}$ in $N+1$ variabili complesse; precisamente richiediamo che i loro luoghi di zeri in $\mathbb{P}^N$ si incontrino trasversalmente in una curva liscia Δ. Ne segue che il luogo di zeri comune a tali forme in $\mathbb{C}^{N+1}$ (proiezione dall'origine di Δ posta sull'iperpiano all'infinito) è una superficie X con una singolarità isolata di tipo normale; si tratta infatti di una intersezione completa liscia fuori di un sottoinsieme di codimensione almeno due. E' chiaro che lo spazio tangente di Zariski in tale punto singolare ha dimensione $N+1$.

Una proiezione generica di $\mathbb{P}^N$ in $\mathbb{P}^3$ induce un isomorfismo di Δ con una curva liscia $\tilde{\Delta}$ in $\mathbb{P}^3$ il cui cono associato $\tilde{X}$ in $\mathbb{C}^4$ è una immagine olomorfa e biunivoca di X ; evidentemente X è la normalizzazione di $\tilde{X}$.

Abbiamo quindi ottenuto uno spazio di Stein $\tilde{X}$ in $\mathbb{C}^4$ la cui normalizzazione non può essere immersa in $\mathbb{C}^n$ se $n < N+1$.
Con una unione disgiunta è poi possibile costruire una superficie di Stein in $\mathbb{C}^4$ avente solo singolarità isolate e la cui normalizzazione non è immergibile in alcun $\mathbb{C}^N$.