Un teorema della media per cammini continui nel piano

1. **Premessa**

Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua su $[a, b]$ e derivabile nei punti di $]a, b[$. Il teorema della media asserisce l'esistenza di almeno un punto $t_0 \in]a, b[$ in cui la derivata di f coincide con il rapporto R tra $f(b) - f(a)$ e $b - a$.
Da un punto di vista geometrico è naturale guardare alla "curva grafico" ϕ di f ossia al cammino nel piano dato da

$$[a, b] \ni t \mapsto \phi(t) = (t, f(t)) \in \mathbb{R}^2$$

che va dal punto $A = (a, f(a))$ al punto $B = (b, f(b))$. Il teorema della media asserisce allora l'esistenza di un "momento" $t_0 \in]a, b[$ in cui lo spostamento globale $B - A = (b - a, f(b) - f(a))$ ha la stessa direzione (ossia è proporzionale) alla velocità di ϕ ossia al vettore $(1, f'(t_0))$; ne segue obbligatoriamente che tale fattore di proporzionalità deve essere lo scalare $b - a$ che è positivo; ma questo ultimo fatto non viene di solito riportato negli enunciati in linguaggio geometrico. Infatti si asserisce che nel punto $(t_0, f(t_0))$ la retta tangente è parallela alla retta secante passante per i punti A e B mentre sarebbe (credo) più preciso asserire che la velocità in tale punto ha la stessa direzione e verso dello spostamento globale, precisando che tale retta ha una orientazione naturale. Nel caso del teorema della media (detto di Lagrange) questa precisazione non è importante perchè non può essere che così ma nelle generalizzazioni al caso di cammini nel piano diviene importante. Ad esempio nella generalizzazione detta di Cauchy, nel punto che verifica la tesi del teorema la velocità ha la stessa direzione del vettore spostamento ma può avere verso opposto; ciò accade ad esempio per il cammino

$$[-2, 2] \ni t \mapsto (t^3 - t, 1 - t^2) \in \mathbb{R}^2$$

in cui nell'unico punto in cui la velocità è orizzontale essa punta da B verso A e non viceversa. Nella generalizzazione che proporremo tale punto non sarà incluso tra le soluzioni ma cercheremo "soluzioni" che "vadano" da A verso B.

Per illustrare la trattazione che daremo del teorema della media, rivediamo il teorema del Rolle modificandone leggermente enunciato e dimostrazione.
Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ e sia $x_0 \in]a, b[$. Diremo che f è *orizzontale* in x_0 se esistono una successione (s_n) in $[a, x_0[$ ed una successione (t_n) in $]x_0, b]$ entrambi convergenti a x_0 e verificanti $f(s_n) = f(t_n)$ per ogni n intero positivo.
La dimostrazione usuale del teorema di Rolle viene svolta con due affermazioni: nella prima si osserva (teorema di Weierstrass) che se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ è continua esiste almeno un punto interno ad $[a, b]$ in cui f ha un massimo od un minimo relativo; qui usando (essenzialmente) la stessa argomentazione, osserveremo che esiste un punto interno in cui la funzione è orizzontale. La seconda affermazione è (teorema di Fermat) che in un punto interno di massimo o minimo relativo se cè la derivata deve essere nulla; noi useremo il fatto analogo che in un punto ove la funzione è orizzontale se esiste la derivata questa è nulla: notiamo che affinché ciò sia vero è essenziale si supponga che le due successioni che danno la orizzontalità stiano da parti opposte rispetto al punto limite.

Queste modifiche ci permetteranno di discutere di "media" nel caso di cammini che non siano grafici di funzioni.

2. **Definizioni e enunciati**

In quel che segue le *direzioni* in $\mathbb{R}^2$ sono gli elementi del cerchio unitario $S^1 = \{x \in R^2\ ;\ ||x|| = 1\}$. La *direzione* di un $x \in R^2 - \{0\}$ è il suo normalizzato.
Diremo che il cammino $\phi : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ ha direzione $T \in S^1$ se $\phi(b) - \phi(a) \neq 0$ ed ha direzione T; in questo caso con il termine *corda di* ϕ indicheremo una coppia (a', b') di scalari con $a < a' < b' < b$ e tali che $\phi(b') - \phi(a')$ sia non nullo e della stessa direzione di ϕ; la quantità strettamente positiva $||\phi(b') - \phi(a')||$ sarà detta *lunghezza* della corda.
Sia $\phi : \Omega \to \mathbb{R}^2$ continua ove Ω è un intorno di un punto x_0 di $\mathbb{R}$ e sia $T \in S^1$. Diremo che $T \in S^1$ è una *secante limite* in x_0 se esistono in Ω una successione (s_n) di punti tendenti ad x_0 dal basso ed una successione (t_n) di punti tendenti a x_0 dall'alto tali che $\phi(s_n) = \phi(t_n)$ per ogni intero n.
Da notare che può non esistere alcuna secante limite anche in situazioni non patologiche come avviene per il cammino $t \mapsto (t, t^3)$ nel punto $t = 0$ (un "ottimo" flesso). Al contrario $t \mapsto (t^2, t^3)$) ammette per $t = 0$ (una singolarità cuspidale) come secante limite tutte quelle che puntano verso l'alto (quelle con la seconda coordinata positiva).
Notiamo anche che il cammino $[-1, 1] \ni t \mapsto (t^2, 0)$ per $t - 0$ ha precisamente due secanti limite: $\pm(1, 0)$ ed è quindi un insieme sconnesso. Ma per cammini localmente iniettivi si può dimostrare che in ogni suo punto l'insieme delle secanti limite è un sottoinsieme connesso in S^1 e che ogni sottoinsieme connesso di S^1 può costituire l'insieme delle secanti limite di un cammino continuo iniettivo; naturalmente si possono avere limitazioni a ciò se si suppongono ipotesi aggiuntive (ad esempio tipi di lipschitzianità per ϕ).

Abbiamo visto sopra che il cammino $t \mapsto (t^3 - t, 1 - t^2)$ per $t \in [-2, 2]$ non ha mai velocità con la direzione del vettore spostamento $T = (4, 0)$ e non ha neppure una secante limite di tale direzione. Per trovare in ogni caso qualcosa che "dia" il "valor medio" dobbiamo allargare ulteriormente la nozione di secante limite. Lo facciamo nel modo seguente:
sia come sopra $\phi : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ una applicazione continua. Diremo che in una coppia (s, t) di elementi di $\mathbb{R}$ con $a < s \leq t < b$ esiste una *direzione* $T \in S^1$ se $\phi(s) = \phi(t)$ ed esistono in $]a, b[$ una successione (s_n) convergente dal basso ad s ed una successione (t_n) convergente a t dall'alto tali che per ogni intero n il vettore $\phi(t_n) - \phi(s_n)$ sia non nullo ed abbia direzione T.
Diremo che in tale coppia (s, t) si ha un *dato di valor medio* per ϕ se $\phi(b) - \phi(a)$ è non nullo ed ha direzione T; evidentemente se s e t sono lo stesso punto allora tale T è in esso quella definita precedentemente come una secante limite.
Le dimostrazioni dei seguenti enunciati sono nel prossimo paragrafo; nei titoli indichiamo a quale corrispondono nella versione classica. Il primo può essere considerato una sorta di "teorema della media" per cammini continui:

Teorema ("di Weierstrass") Ogni cammino continuo $[a, b] \ni t \mapsto \phi(t) \in \mathbb{R}^2$ per il quale $\phi(a) \neq \phi(b)$ possiede almeno un dato di valor medio. Nel caso che ϕ sia iniettivo esiste quindi un punto $t \in]a, b[$ in cui esiste la direzione dello spostamento $\phi(b) - \phi(a)$

Teorema ("di Fermat") In un punto $r \in]0,1[$ nel quale ϕ ha una derivata e questa è non nulla esiste al più la direzione di essa

Teorema ("di Lagrange") Sia $\phi : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ un cammino che sia continuo, iniettivo e derivabile nei punti di $]a,b[$ con derivata mai nulla. Esiste allora un punto $t_0 \in]a,b[$ in cui la derivata $\phi'(t_0)$ ha la stessa direzione dello spostamento $\phi(b) - \phi(a)$

Nota. Nel caso in cui ϕ sia il cammino ottenuto come grafico di una funzione $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ossia si abbia $\phi(t) = (t, f(t))$ per $t \in [a,b]$ l'enunciato del precedente teorema diviene esattamente quello classico del teorema della media di Lagrange: la richiesta che ϕ sia iniettivo essendo automaticamente verificata per i grafici di funzioni.

Esempi Nel cammino $[-2,2] \ni t \mapsto (t^3 - t, 1 - t^2) \in \mathbb{R}^2$ si ha un solo dato di valor medio $(0,1)$ solo una volta e precisamente esiste per i due valori $t = \pm 1$ nei quali il cammino si autoattraversa.

Nel cammino iniettivo $[-1,1] \ni t \mapsto (t^2, t^3)$ la direzione dello spostamento (assieme ad altre) si ottiene per $t = 0$ (il punto di cuspide).

Lemma (esistenza di corde) Ogni cammino $\phi : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ che è continuo ed ha uno spostamento globale $\phi(b) - \phi(a)$ non nullo possiede almeno una corda, ossia esistono a'e b' con $a < a' < b' < b$ tali che $\phi(b') - \phi(a')$ sia non nullo e della stessa direzione $\phi(b) - \phi(a)$. Anzi di tali corde ne esistono aventi lunghezza arbitrariamente piccola

3. Dimostrazioni
Cominciamo con la dimostrazione di esistenza di corde che è l'unica non "elementare" perché presuppone nozioni di topologia algebrica.

Lo spostamento $\phi(b) - \phi(a)$ è supposto non nullo: sia T la sua direzione. Dobbiamo mostrare che esistono a' e b' in $\mathbb{R}$ con $a < a' < b' < b$ con $\phi(b') - \phi(a')$ non nullo e di direzione T.
Sia I l'intervallo aperto in R^2 avente per estremi $\phi(a)$ e $\phi(b)$.
Supponiamo dapprima che ϕ "non attraversi" I, ossia che $\phi([a,b]) \cap I = \emptyset$. Consideriamo il triangolo $\Delta = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / : \ a \le x \le y \le b\}$ e sia $\sigma : \Delta \to X$ definita da $\sigma(x,y) = \phi(y) - \phi(x) + \phi(a)$.
Asserzione: se ϕ non attraversa I allora l'immagine di σ contiene tutto I; ossia per ogni $\rho \in]0,1[$ esistono $s, t \in]a,b[$ con $s < t$ e $\phi(t) - \phi(s) = \rho(\phi(b) - \phi(a))$ o in altri termini ϕ possiede corde di ogni lungezza inferiore a quella di ϕ.
Infatti sia fissato un $l \in I$. La restrizione di σ al lato obliquo di Δ vale costantemente $\phi(a)$ mentre le restrizioni al lato verticale ed orizzontale di Δ "sono" il cammino ϕ ed il suo simmetrizzato rispetto al punto medio di I. La restrizione di σ al bordo di Δ può quindi essere interpretata come un laccetto in $\mathbb{R}^2 - \{l\}$ di punto base $\phi(a)$, che definisce così una classe $\bar{l}$ in $\pi_1(\mathbb{R}^2 - \{l\}, \phi(a)) \cong \mathbb{Z}$. Se σ evitasse l, siccome Δ è contrattile, deformando il bordo di Δ al punto

$\phi(a)$ (ad esempio facendo muovere il lato orizzontale di Δ parallelamente a se stesso verso il basso e componendo quindi con σ) si otterrebbe una deformazione (omotopia in $\mathbb{R}^2 - \{l\}$) del laccetto sopra indicato a quello costante in $\phi(a)$ e si avrebbe quindi che la classe $\bar{l}$ è nulla. Basterà quindi mostrare che $\bar{l}$ è non nulla in $\pi_1(\mathbb{R}^2 - \{l\}, \phi(a)) \cong \mathbb{Z}$. Verifichiamo infatti che $\bar{l}$ è sempre rappresentata, nelle ipotesi che ϕ non attraversi I, da un elemento dispari di $\mathbb{Z}$: intanto è ovvio che variando con continuità ϕ tra le applicazioni di $[a, b]$ in $\mathbb{R}^2 - I$ anche la sua trasformata mediante σ varia con continuità; basterà quindi esaminare le ϕ in una classe di rappresentanti omotopici delle applicazioni continue di $[a, b]$ in $\mathbb{R}^2 - I$ che applicano a in $\phi(a)$ ed b in $\phi(b)$ ad esempio quelle del tipo seguente: detto S il cerchio avente I come diametro, lo si percorra un certo numero n di volte (ad esempio in senso antiorario per n positivo e orario per n negativo) a partire da $\phi(a)$ e quindi, proseguendo, ancora un'altra metà. E' chiaro che per una tale ϕ la classe $\bar{l}$ corrispode a $2n + 1 \in \mathbb{Z}$. Quindi se ϕ non attraversa I la tesi è dimostrata.
Mostriamo adesso che ϕ possiede in ogni caso corde di lunghezza arbitrariamente piccola. Sappiamo che se ϕ ha una corda (s, t) che "non attraversa il suo" I, ossia tale che $\phi([s, t]) \cap]\phi(s), \phi(t)[= \emptyset$, allora ϕ ha corde di tutte le lunghezze inferiori alla lunghezza di (s, t) e la tesi è verificata. Altrimenti per ogni corda (s, t), esiste $x \in]s, t[$ tale che (s, x) e (x, t) sono ancora corde di ϕ. Ognuna di esse sarà nello stesso modo divisibile in due corde successive. Continuando così dopo n passi l'intervallo $[s, t]$ viene diviso in 2^n intervalli successivi ognuno dei quali fornisce una corda di ϕ. Essendo ϕ continua su $[a, b]$ che è compatto essa è uniformemente continua; quindi fissato un qualsiasi $\epsilon > 0$ esiste un $\delta > 0$ tale che ogni corda (s, t) con $|t - s| < \delta$ ha lunghezza inferiore ad ϵ; al crescere di n qualcuno dei 2^n intervallini in cui è diviso $[a, b]$ dovrà avere lunghezza inferiore a δ e allora i suoi estremi saranno una corda di lunghezza inferiore ad ϵ.

Dimostriamoi il teorema "di Weierstrass".
Per il lemma di esistenza di corde, il cammino ϕ, avendo uno spostamento globale $S \neq 0$, possiede una corda (a_1, b_1) di lunghezza al più $2^{-1} \cdot S$. La restrizione di ϕ al segmento $[a_1, b_1]$ è ancora un cammino con spostamento non nullo ed avente la stessa direzione di ϕ, per cui le sue corde sono anche corde per ϕ. Rifacendo quanto detto a partire da ϕ si ha l'esistenza di una sua corda che ha lunghezza inferiore a $2^{-2} \cdot S$. Iterando questa procedura si trovano due successioni (a_n) crescente e (b_n) decrescente tali che per ogni intero positivo n si ha $a_n < b_n$, il vettore $\phi(a_n) - \phi(b_n)$ è non nullo, ha per direzione quella di ϕ e norma inferiore a $2^{-n} \cdot S$. E'ovvio (a_n) e (b_n) convergono a scalari s e t con $s \leq t$ e che quanto costruito mostra che nella coppia (s, t) si ha un dato di valor medio per ϕ.

Dimostriamo ora il Teorema "di Fermat"
Sia $T \neq 0$ la derivata di ϕ in r.
Per $0 < s < r$ e $r < t < 1$ definiamo $u, v \in \mathbb{R}^2$ per le formule:

$$\frac{\phi(r) - \phi(s)}{r - s} = T + u \qquad \frac{\phi(t) - \phi(r)}{t - r} = T + v$$

Quindi per $s \to r$ e $t \to r$ si ha $u, v \to 0$. Moltiplicando la prima per $r - s$, la seconda per $t - r$, sommando le due e dividendo tutto per $t - s$ si ottiene:

$$\frac{\phi(t) - \phi(s)}{t - s} = T + \frac{r - s}{t - s} u + \frac{t - r}{t - s} v$$

Se s, t tendono ad r appartenendo a delle successioni che evidenziano una data direzione D di ϕ in r e quindi il membro di sinistra ha sempre direzione D, anche quello di destra deve avere direzione costantemente D ; al limite questa è la direzione di T che è quindi anch'essa D.

La dimostrazione del teorema di Lagrange è ottenuta come nel caso classico come ovvio corollario dei teoremi "di Weierstrass" e "di Fermat".