L'anello dei polinomi di Laurent

Sia $A := \mathbb{Q}[t, t^{-1}] = \left\{\sum_{i=-r}^{n} a_i t^i\right\}$ l'anello dei *polinomi di Laurent*, i cui elementi sono somme *finite* di monomi del tipo $a_i t^i$, dove $a_i \in \mathbb{Q}$ e i può essere anche negativo. Somme e prodotti di polinomi di Laurent si fanno nella maniera ovvia: per esempio,

$$(t^{-3} + t^{-1} + t^4)(t^{-2} + 1) = t^{-5} + t^{-3} + t^2 + t^{-3} + t^{-1} + t^4 = t^{-5} + 2t^{-3} + t^{-1} + t^2 + t^4.$$

Si può verificare senza grande difficoltà che A è un anello, e che contiene $\mathbb{Q}[t]$ come sotto-anello.

Verifichiamo ora che A è un dominio di integrità. Siano $p_1(t), p_2(t) \in A$ tali che $p_1(t)p_2(t) = 0$. Possiamo scrivere

$$p_1(t) = \sum_{i=-r_1}^{n_1} a_i t^i, \quad p_2(t) = \sum_{i=-r_2}^{n_2} b_i t^i;$$

osserviamo che $t^{r_1}p_1(t)$ e $t^{r_2}p_2(t)$ sono ancora elementi di A, e più precisamente sono polinomi "usuali", ovvero sono contenuti nel sotto-anello $\mathbb{Q}[t]$ di A. Inoltre, se $p_1(t)$ non è zero, allora $t^{r_1}p_1(t)$ non è zero, e similmente se $p_2(t)$ non è zero, nemmeno $t^{r_2}p_2(t)$ è zero. Ne segue che (se $p_1(t), p_2(t)$ sono diversi da zero) si ha

$$(t^{r_1}p_1(t))(t^{r_2}p_2(t)) \neq 0,$$

in quanto prodotto di polinomi diversi da zero. Questo implica che $p_1(t)p_2(t) \neq 0$, perché

$$(t^{r_1}p_1(t))(t^{r_2}p_2(t)) = t^{r_1+r_2}p_1(t)p_2(t),$$

quindi se $p_1(t)p_2(t)$ fosse uguale a zero anche $(t^{r_1}p_1(t))(t^{r_2}p_2(t))$ sarebbe zero. Combinato con il fatto che A è un anello commutativo, questo mostra che A è un dominio d'integrità.

Mostriamo ora che vale l'isomorfismo $\dfrac{\mathbb{Q}[x,y]}{(xy-1)} \cong A$. Definiamo innanzitutto un omomorfismo $\Phi : \mathbb{Q}[x,y] \to A$ nella maniera seguente:

$$\begin{array}{rccc} \Phi : & \mathbb{Q}[x,y] & \to & A \\ & p(x,y) = \sum_{i,j} c_{i,j} x^i y^j & \mapsto & \sum_{i,j} c_{i,j} t^{i-j}. \end{array}$$

Verifichiamo che si tratti in effetti di un omomorfismo. Dato che è definito monomio per monomio (in altri termini: dato che è un'applicazione lineare!) chiaramente preserva la somma. In quanto al prodotto, se $p_1(x,y) = \sum_{i,j} a_{i,j} x^i y^j$ e $p_2(x,y) = \sum_{k,l} b_{k,l} x^k y^l$, allora

$$p_1(x,y)p_2(x,y) = \sum_{m,n} x^m y^n \sum_{\substack{i+k=m \\ j+l=n}} a_{i,j} b_{k,l}$$

che tramite Φ viene mandato in

$$\begin{aligned} \Phi\left(p_1(x,y)p_2(x,y)\right) &= \sum_{m,n} t^{m-n} \sum_{\substack{i+k=m \\ j+l=n}} a_{i,j} b_{k,l} \\ &= \sum_{d} t^d \sum_{n} \sum_{\substack{i+k=n+d \\ j+l=n}} a_{i,j} b_{k,l} \\ &= \sum_{d} t^d \sum_{i+k-j-l=d} a_{i,j} b_{k,l}; \end{aligned}$$

d'altro canto si ha

$$\begin{aligned}\Phi(p_1(x,y))\cdot\Phi(p_2(x,y)) &= \left(\sum_{i,j} a_{i,j}t^{i-j}\right)\left(\sum_{k,l} b_{k,l}t^{k-l}\right)\\ &= \sum_r t^r \sum_{i-j+k-l=r} a_{i,j}b_{k,l},\end{aligned}$$

che coincide con quanto trovato prima: Φ è quindi un omomorfismo come affermato. Si noti che le somme si intendono estese su tutti i valori degli indici che rispettano le condizioni indicate; possiamo omettere gli estremi dell'intervallo in cui variano tali indici, perché quando uno di essi è troppo grande (o troppo piccolo) uno dei coefficienti $a_{i,j}$ o $b_{k,l}$ si annulla.

Dimostriamo ora che il nucleo di Φ è l'ideale I di $\mathbb{Q}[x,y]$ generato da $(xy-1)$.

Certamente si ha $I \subseteq \ker\Phi$: infatti $\Phi(xy-1) = t\cdot t^{-1} - 1 = 0$, quindi $\ker\Phi$ contiene $xy-1$ e quindi contiene l'intero ideale generato da $xy-1$.

Occupiamoci ora del viceversa: sia $p(x,y) = \sum_{i,j} c_{i,j}x^i y^j$ un polinomio nel nucleo di Φ; vogliamo dimostrare che $p(x,y)$ è divisibile per $xy-1$, o equivalentemente che $p(x,y) \in I$. Sia n il massimo esponente di y fra tutti i monomi di $p(x,y)$. Allora si ha

$$x^n p(x,y) = \sum_{i,j} c_{i,j}x^{n+i}y^j,$$

dove $c_{i,j} = 0$ se $j > n$. Siccome $xy - 1 \equiv 0 \pmod I \Rightarrow xy \equiv 1 \pmod I$ si ha $x^n y^j \equiv (xy)^j x^{n-j} \equiv x^{n-j} \pmod I$; abbiamo quindi ottenuto

$$x^n p(x,y) \equiv \sum_{i,j} c_{i,j}x^{n+i-j} \pmod I,$$

e d'altra parte $\Phi(x^n p(x,y)) = \Phi(x^n)\Phi(p(x,y)) = t^n \cdot 0 = 0$. Quindi: $x^n p(x,y)$ è nel nucleo di Φ, ma anche I è nel nucleo di Φ, e siccome $\sum_{i,j} c_{i,j}x^{n+i-j}$ differisce da $x^n p(x,y)$ per un elemento di I abbiamo ottenuto che $\sum_{i,j} c_{i,j}x^{n+i-j}$ è nel nucleo di Φ. Ma $\sum_{i,j} c_{i,j}x^{n+i-j}$ è un polinomio (nel senso che tutti gli esponenti sono ≥ 0), quindi $\Phi(\sum_{i,j} c_{i,j}x^{n+i-j}) = \sum_{i,j} c_{i,j}t^{n+i-j} = 0$ vuol dire che $\sum_{i,j} c_{i,j}x^{n+i-j}$ è esso stesso zero. Abbiamo perciò dimostrato che

$$x^n p(x,y) \equiv \sum_{i,j} c_{i,j}x^{n+i-j} \equiv 0 \pmod I,$$

ovvero che $x^n p(x,y) \in I$ per qualche n. Siamo all'ultimo passo: vogliamo dimostrare che questo implica che $p(x,y)$ appartiene ad I. In effetti, se $x^n p(x,y)$ sta in I, allora certamente (visto che I è un ideale) si ha anche $y^n x^n p(x,y) \in I$. Ma allora, siccome $xy \equiv 1 \pmod I \Rightarrow (xy)^n \equiv 1 \pmod I$, otteniamo

$$0 \equiv y^n x^n p(x,y) \equiv (xy)^n p(x,y) \equiv p(x,y) \pmod I,$$

ovvero $p(x,y) \in I$ come voluto.

Osserviamo infine che $\Phi : \mathbb{Q}[x,y] \to A$ è surgettivo: in effetti è sufficiente vedere che l'immagine di Φ contiene ogni monomio t^k, e si ha $\Phi(x^k) = t^k$ se $k \geq 0$, mentre $\Phi(y^{|k|}) = t^k$ se $k \leq 0$. Combinando queste osservazioni con il primo teorema di isomorfismo per anelli abbiamo allora ottenuto:

Teorema 1. *Il quoziente $\frac{\mathbb{Q}[x,y]}{(xy-1)}$ è isomorfo all'anello A dei polinomi di Laurent. Siccome A è integro, $xy-1$ è un ideale primo.*