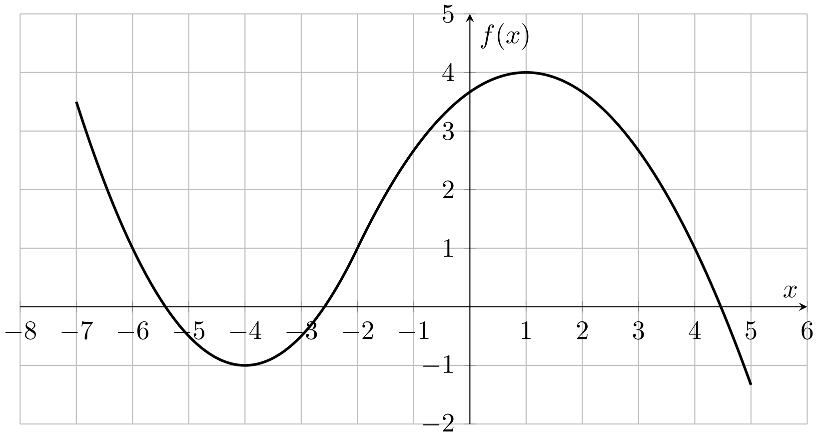
Compito del 9 gennaio 2023

Avete 2 ore e 30 minuti di tempo a disposizione. Motivate le vostre risposte. Sarà valutata anche l'esposizione e non saranno corretti esercizi illeggibili. Non si possono usare libri, appunti, calcolatrici, cellulari, pena l'annullamento del compito.

Esercizio 1. La funzione $f : [-5, 2] \longrightarrow \mathbb{R}$ ha il seguente grafico:



Sia $g : [-5, 7] \longrightarrow \mathbb{R}$ la funzione $g(x) = 2f(-x)$:

a) Risolvere l'equazione $f(x) = 1$;
b) Per quali x vale $f'(x) \geqslant 0$?
c) Disegnare un grafico il più possibile accurato della funzione g.

Esercizio 2. In un esperimento viene misurata la quantità in una sostanza presente nel sangue di un animale al variare del tempo t. I ricercatori vogliono controllare se tale quantità è bene approssimata da una funzione $f_a : [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ della forma

$$f_a(t) = a + t^2 e^{-t^2}$$

dove a indica la quantità di tale sostanza al tempo iniziale. I ricercatori si sono dimenticati di misurare la quantità di tale sostanza al tempo iniziale. Per $t = 1$ hanno ottenuto che la quantità è pari a $2 + e^{-1}$.

Supponendo che le misurazioni effettuate confermino che la funzione proposta approssimi bene la quantità in questione determinare

a) la quantità iniziale della sostanza.
b) in quale momento la sostanza è massima.
c) che valore hanno ottenuto per la misurazione della sostanza a $t = 2$.
d) per t molto grande, approssimativamente, che valore otterranno i ricercatori?

Esercizio 3. Determinare l'area compresa tra l'asse delle x, la funzione $\log_e(x)$, le rette $x = 1/e$ e $x = e$.

Esercizio 4. Ci sono tre sacchetti contenti delle palline numerate. Il primo sacchetto contiene sette palline numerate da 1 a 7, il secondo due palline numerate con 8 e 9 e il terzo cinque palline numerate da 1 a 5. Si sceglie un sacchetto a caso e poi si estrae una pallina a caso dal sacchetto.

a) Qual'è la probabilità che la pallina estratta sia un 8?
b) Qual'è la probabilità che la pallina estratta sia un 5?
c) Sapendo che la pallina estratta è un 5 quale è la probabilità che sia stato scelto il primo sacchetto?

Esercizio 5. Si verifichi che la funzione

$$f(t) = \frac{e^{\pi t/2}}{e^{\pi t} + 1}, \quad t \in \mathbb{R},$$

è una densità di probabilità, e si trovi la funzione di ripartizione F_X di una variabile X con densità $f = f_X$. Si rappresentino le due funzioni $f = f_X$ e F_X con due grafici. Trovare il valore di t per cui

$$\mathbb{P}(X \leqslant t) = F_X(t) = \frac{1}{2}$$

(tale valore è detto *mediana* di X).

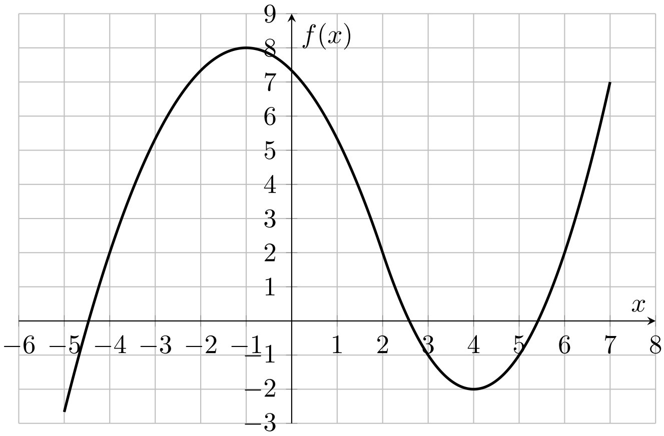
NOTA: si ricordi che $\frac{d}{dx}(\tan^{-1}(x)) = \frac{1}{1+x^2}$.

Soluzioni del compito del 9 gennaio

Soluzione dell'esercizio 1. a) le soluzioni di $f(x) = 1$ sono $x = -5$, $x = -3$, e $x = 4$.

b) La derivata è positiva in quegli intervalli dove la funzione è crescente. Nel nostro caso nell'intervallo $(4, 1)$

c)



Soluzione dell'esercizio 2. a) Sappiamo che $f_a(1) = 2+e^{-1}$. Dall'espressione di f_a ricaviamo $a+e^{-1} = 2 + e^{-1}$, da cui $a = 2$.

b) Per capire quando la sostanza raggiunge il valore massimo studiamo il segno della derivata di f_a.

$$f_a'(x) = 2te^{-t^2} + t^2(-2t)e^{-t^2} = 2e^{-t^2}t(1 - t^2)$$

Il segno di f_a è quindi uguale al segno di $t(1 - t^2)$, perché l'esponenziale è sempre un numero positivo. La funzione f_a è definita, per ipotesi dell'esercizio, per $t \geqslant 0$ quindi anche il termine t è sempre positivo, tranne che in $t = 0$. Ricaviamo quindi che

- $f_a'(t) > 0$ per $t \in (0, 1)$
- $f_a'(t) = 0$ per $t = 0$ e $t = 1$
- $f_a'(t) < 0$ per $t \in (1, \infty)$

Quindi f è crescente nell'intervallo $[0, 1]$ e decrescente nell'intervallo $[1, \infty]$.

In particolare f_a ha un punto di massimo in $t = 1$.

c) $f_2(2) = 2 + 4e^{-4}$

d) Per capire il valore di f_2 per t molto grande possiamo calcolare il limite di $f_2(t)$ per t che tende a ∞.

$$\lim_{t\to\infty} 2 + t^2e^{-t^2} = 2 + \lim_{t\to\infty} \frac{t^2}{e^{t^2}} = 2 + \lim_{t\to\infty} \frac{s}{e^s} = 2 + 0 = 2$$

dove abbiamo utilizzato il fatto che l'esponenziale e^s tende a infinito più velocemente di un polinomio.

Soluzione dell'esercizio 3. Osserviamo che la funzione $\log_e$ è positiva per $x > 1$ e negativa per $0 < x < 1$.

L'aerea cercata è quindi uguale a

$$-\int_{1/e}^{1} \log(x)\, dx + \int_{1}^{e} \log(x)\, dx$$

Procediamo integrando per parti. Otteniamo

$$-\left([x \log x]_{1/e}^{1} - \int_{1/e}^{1} x\frac{1}{x}\, dx\right) + [x \log x]_1^e - \int_1^e x\frac{1}{x}\, dx$$

$$= -[x \log x]_{1/e}^{1} + \int_{1/e}^{1} 1\, dx + [x \log x]_1^e - \int_1^e 1\, dx = -[x \log x]_{1/e}^{1} + [x]_{1/e}^{1} + [x \log x]_1^e - [x]_1^e$$

$$= -1 \log(1) + \frac{1}{e} \log(\frac{1}{e}) + 1 - \frac{1}{e} + e \log e - 1 \log 1 - e + 1 = -0 + \frac{1}{e}(-1) + 1 - \frac{1}{e} + e - 0 - e + 1$$

$$= 2 - \frac{2}{e}$$

Soluzione dell'esercizio 4. a) Per ottenere 8 dobbiamo scegliere il secondo sacchetto (questo avviene con probabilità 1/3) e poi all'interno di questo sacchetto la pallina numerata con 8 (questo avviene con probabilità 1/3). Quindi questo avviene con probabilità

$$P(X = 8) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$

b) Per ottenere 5 dobbiamo scegliere il primo sacchetto (questo avviene con probabilità 1/3) e poi all'interno di questo sacchetto la pallina numerata con 5 (questo avviene con probabilità 1/7) oppure scegliere il terzo sacchetto (questo avviene con probabilità 1/3) e poi all'interno di questo sacchetto la pallina numerata con 5 (questo avviene con probabilità 1/5)

$$P(X = 5) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{7} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{21} + \frac{1}{15} = \frac{4}{35}$$

c) Indichiamo con A l'evento "esce una pallina numerata con 5" e con B l'evento "è stato scelto il primo sacchetto". Vogliamo calcolare $P(B|A)$. Abbiamo quindi che la probabilità cercata è

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}$$

$P(A)$ lo abbiamo calcolato alla precedente domanda ed è uguale a 4/35. La probabilità di $B \cap A$ è la probabilità di scegliere il primo sacchetto e che poi esca la pallina 5 ed è quindi uguale a

$$P(B \cap A) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{7} = \frac{1}{21}.$$

Quindi la probalità che a noi interessa è uguale a

$$P(B|A) = \frac{1/21}{4/35} = \frac{5}{12}$$

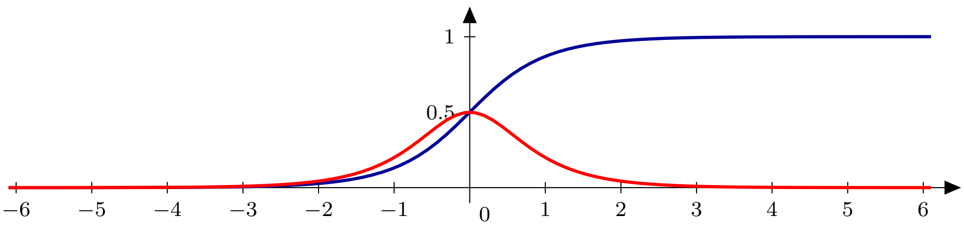
Soluzione dell'esercizio 5. Osserviamo anzitutto che $e^t \geqslant 0$ per ogni $t \in \mathbb{R}$, dunque $f(t) \geqslant 0$ per ogni $t \in \mathbb{R}$. Per mostrare che f è una densità di probabilità resta solo da mostrare che è integrabile e che l'integrale su tutto $\mathbb{R}$ fa esattamente 1. Integrando per sostituzione: $e^{\pi t/2} = x$, $\frac{\pi}{2} e^{\pi t/2} dt = dx$,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\pi t/2}}{e^{\pi t} + 1} dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{dx}{1 + x^2} = \frac{2}{\pi} \left[\tan^{-1}(x)\right]_0^{\infty} = 1.$$

Con lo stesso calcolo si ottiene che

$$F(t) = \int_{-\infty}^{t} f(s)ds = \frac{2}{\pi} \int_0^{e^{\pi t/2}} \frac{dx}{1 + x^2} = \frac{2}{\pi} \tan^{-1}(e^{\pi t/2}).$$

Segue il grafico di f (in rosso) e di F (in blu). Gli elementi fondamentali nel grafico di f sono la simmetria rispetto all'origine e la decrescita rapida a 0 a $\pm\infty$. Il grafico di F si ricava dalle solite considerazioni sul grafico della primitiva di una funzione data e dalle proprietà note soddisfatte dalle funzioni di ripartizione di probabilità.



Infine, si ha che

$$\frac{1}{2} = F(t) = \frac{2}{\pi} \tan^{-1}(e^{\pi t/2}) \quad \Rightarrow \quad e^{\pi t/2} = \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1,$$

per cui la risposta all'ultimo quesito è $t = 0$.