Analisi Matematica B - Compitino del 20 dicembre 2011

Testi e soluzioni

Esercizio 1. Determinare tutte le soluzioni complesse dell'equazione

$$z^2 = -8\bar{z},$$

esplicitandone la parte reale e la parte immaginaria.

Soluzione. Una soluzione è $z = 0$; cerchiamo le altre. Prendendo i moduli troviamo

$$|z^2| = | - 8\bar{z}|^2 \qquad \Longleftrightarrow \qquad |z|^2 = 8|z|,$$

da cui, dato che $|z| \neq 0$, $|z| = 8$. Moltiplicando l'equazione data per z troviamo

$$z^3 = -8\bar{z}z \qquad \Longleftrightarrow \qquad z^3 = -8|z|^2 \qquad \Longleftrightarrow \qquad z^3 = -8^3,$$

dunque le soluzioni diverse da zero sono le 3 radici cubiche di -8^3. Una di esse è -8, quindi le altre si ottengono moltiplicando -8 per le 3 radici cubiche di 1:

$$-8 \cdot 1, \qquad -8 \cdot e^{\frac{2\pi}{3}i}, \qquad -8 \cdot e^{\frac{2\pi}{3}i}.$$

Usando le uguaglianze

$$\begin{aligned} e^{\frac{2\pi}{3}i} &= \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\,i, \\ e^{\frac{4\pi}{3}i} &= \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\,i, \end{aligned}$$

concludiamo che l'equazione proposta ha le 4 soluzioni:

$$z_1 = 0, \qquad z_2 = -8, \qquad z_3 = 4 - 4\sqrt{3}\,i, \qquad z_4 = 4 + 4\sqrt{3}\,i.$$

Esercizio 2. Determinare il numero delle soluzioni reali dell'equazione

$$\arctan x = -\frac{x^2 - x + 2}{1 + x^2}.$$

Soluzione. Portando tutto al primo membro, si tratta di determinare il numero degli zeri della funzione

$$f(x) := \arctan x + \frac{x^2 - x + 2}{1 + x^2},$$

che è ben definita e derivabile su tutto $\mathbb{R}$. La sua derivata vale

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{1+x^2} + \frac{(2x-1)(1+x^2) - 2x(x^2 - x + 2)}{(1+x^2)^2} \\ &= \frac{1}{(1+x^2)^2}(1 + x^2 + 2x + 2x^3 - 1 - x^2 - 2x^3 + 2x^2 - 4x) \\ &= \frac{1}{(1+x^2)^2}(2x^2 - 2x) = \frac{2x(x-1)}{(1+x^2)^2}. \end{aligned}$$

Dunque $f'(x) > 0$ per $x < 0$ e per $x > 1$, mentre $f'(x) < 0$ per $0 < x < 1$. Perciò f cresce strettamente su $]-\infty, 0]$, decresce strettamente su $[0,1]$ e cresce strettamente su $[1, +\infty[$. Dato che

$$f(1) = \arctan 1 + \frac{1 - 1 + 2}{1 + 1} = \frac{\pi}{4} + 1 > 0,$$

il fatto che $f(x) \geq f(1)$ per ogni $x \in [0, +\infty[$ implica che f non ha zeri in $[0, +\infty[$.

Determiniamo il limite di $f(x)$ per $x \to -\infty$. L'arcotangente di x tende a $-\pi/2$, mentre

$$\frac{x^2 - x + 2}{1 + x^2} = \frac{1 - \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}}{\frac{1}{x^2} + 1}$$

tende a 1. Dunque

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \left(\arctan x + \frac{x^2 - x + 2}{1 + x^2} \right) = -\frac{\pi}{2} + 1 < 0.$$

Insieme al fatto che $f(0) > 0$, il teorema degli zeri ci assicura che f ha almeno uno zero in $]-\infty, 0[$. Ma essendo strettamente monotona su tale intervallo, tale zero è unico. Conclusione: l'equazione proposta ha esattamente una soluzione (che risulta negativa).

Esercizio 3. Determinare, se esistono, il massimo e il minimo della funzione

$$f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}, \qquad f(x) = \frac{\log x}{\sqrt[3]{x}}.$$

Soluzione. Studiamo la monotonia di f. La funzione f è derivabile su tutto $]0, +\infty[$ e risulta

$$f'(x) = D(x^{-1/3} \log x) = \frac{1}{3} x^{-4/3} \log x + x^{1/3} \frac{1}{x} = x^{-4/3} \left(1 - \frac{1}{3} \log x \right).$$

Quindi $f'(x) \geq 0$ se e solo se il numero positivo x verifica

$$1 - \frac{1}{3} \log x \geq 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \log x \leq 3 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x \leq e^3,$$

mentre $f'(x) \leq 0$ se e solamente se

$$x \geq e^3.$$

Ne segue che f è crescente su $]0, e^3]$ e decrescente su $[e^3, +\infty[$. Perciò f assume massimo in e^3 ed il massimo vale

$$\max_{x>0} f(x) = f(e^3) = \frac{\log e^3}{\sqrt[3]{e^3}} = \frac{3}{e}.$$

Non essendovi altro punto dove si annulla la derivata ed essendo definita su un intervallo aperto, f non possiede minimo (in effetti il limite destro di $f(x)$ per $x \to 0$ è $-\infty$).