Esercizio 1. Senza ricorrere alla calcolatrice disporre in ordine crescente i seguenti numeri:

$$1,12 \qquad \frac{3}{4} \qquad \frac{\pi}{2} \qquad \frac{4}{3} \qquad \sqrt{2}.$$

Esercizio 2. Partendo dalle definizioni date in classe dimostrare che $\frac{a}{-b} = -\frac{a}{b}$ per ogni $a, b \in \mathbb{R}$ e $b \neq 0$.

Esercizio 3. Descrivere l'insieme dei numeri reali x tali che $x^3 - 2x^2 - x \geqslant 0$.

Esercizio 4. Trovare tutti i numeri reali x tali che $|2x - 1| = |x + 3|$.
Trovare tutti i numeri reali x tali che $x^2 - 2|x| + 1 = 0$.
Trovare tutti i numeri reali x tali che $x^2 + 2|x| + 1 = 0$.

Esercizio 5. Descrivere l'insieme dei numeri reali x tali che $x^2 - 2|x| + 1 > 0$.
Descrivere l'insieme dei numeri reali x tali che $x^2 + 2|x| + 1 > 0$.

Esercizio 6. Scrivere il numero $1,2\overline{345}$ come frazione.

Esercizio 7. Dimostrare le seguenti disuguaglianze
a) $(a + b)^2 \leqslant 2(a^2 + b^2)$ per ogni $a, b \in \mathbb{R}$;
b) $\left|a + \frac{1}{a}\right| \geqslant 2$ per ogni $a \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$;

Esercizio 8. Dimostrare che

$$|a - b| \geqslant \big||a| - |b|\big|$$

per ogni $a, b \in \mathbb{R}$.

Esercizio 9. Dimostrare che $a^2 + b^2 + c^2 \geqslant \frac{1}{3}(a + b + c)^2$ per ogni $a, b, c \in \mathbb{R}$

Esercizio 10. Tra tutti i parallelepipedi di volume 1 quale è quello con superficie esterna minima?

Esercizio 11. Tra tutti i parallelepipedi di volune 1 quale è quello con la somma della lunghezza degli spigoli minima?

Esercizio 12. Dimostrare che per ogni intero $n \geqslant 1$ si ha

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} \leqslant \frac{3}{4} - \frac{1}{4n}.$$

Esercizio 13. Siano a e b due numeri reali non negativi. Dimostrare che $a \geqslant b$ se e solo se $a^n \geqslant b^n$.

Esercizio 14. Dimostrare le seguenti uguaglianze:

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}, \qquad \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \qquad \sum_{i=1}^{n} i^3 = \Big(\sum_{i=1}^{n} i\Big)^2$$

Esercizio 15. Dimostrare che per ogni numero reale $x \geqslant 1$ e per ogni naturale positivo n si ha

$$\sqrt[n]{x} - 1 \leqslant \frac{x-1}{n}.$$

Esercizio 16. a) Mostrare che se $A \subset B \subset \mathbb{R}$ sono insieme non vuoti allora

$$\inf B \leqslant \inf A \leqslant \sup A \leqslant \sup B.$$

Si forniscano esempi in cui le disuguaglianze sono strette ed esempi in cui non lo sono.
b) Se A e B sono sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ allora $\sup A \cup B = \max\{\sup A, \sup B\}$.

Esercizio 17. Determinare estremo superiore e inferiore e se esistono massimo e minimo degli insiemi:

$$A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 < 2\};$$
$$B = \{\frac{2x}{x^2+1} : x \in \mathbb{R}\};$$
$$C = \{x + \frac{1}{x} : x > 0\};$$
$$D = \{x^2 + y^2 : x, y \in [0,1] \text{ e } x < y\};$$
$$E = \{x^2 - y^2 : 0 < y < x < 4\}.$$

Esercizio 18. Determinare estremo superiore e inferiore e se esiste massimo e minimo dell'insieme

$$A = \{a + b : a, b \in \mathbb{R}, a > 0 \quad b > 0 \text{ e } ab = 1\}.$$

Esercizio 19. Siano $x, y \geqslant 0$ due numeri reali. Mostrare che $x \geqslant y$ se e solo se $\sqrt[n]{x} \geqslant \sqrt[n]{y}$.

Esercizio 20. Determinare estremo superiore e inferiore e se esistono massimo e minimo degli insiemi:

$$A = \{\frac{n}{n^2+1} : n \in \mathbb{N}_+\};$$
$$B = \{\frac{1}{2^n} : n \in \mathbb{N}\};$$
$$C = \{\frac{n!}{n^n} : n \in \mathbb{N}_+\};$$
$$D = \{\sqrt{n^2+1} - n : n \in \mathbb{N}\}.$$

Si ricorda che $n!$ è il prodotto di tutti i numeri naturali da 1 a n, ad esempio $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$.

Esercizio 21. Determinare estremo superiore e inferiore e se esiste massimo e minimo dell'insieme

$$A = \{3a + 4b : a, b \in \mathbb{R}, a > 0\ b > 0 \text{ e } ab = 1\}.$$

Esercizio 22. Sia $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita da $f(x) = x^2 - 3x + 2$. Calcolare estremo superiore ed inferiore della funzione f, e se esitono, massimo e minimo e punti di massimo e punti di minimo.

Esercizio 23. Calcolare $(i + i)^2$. Calcolare $(3, 4) \cdot (3, -4)$.

Esercizio 24. Calcolare l'inverso di $(1 + 2i)$ e di $(1 + i)$.

Esercizio 25. Calcolare le radici quarte di -16. Calcolare le radici ottave di -1.

Esercizio 26. Risolvere l'equazione $t^2 + 2t + 10 = 0$. Calcolare parte reale e parte immaginaria degli z tali che $z^2 = 5 + 12i$.

Esercizio 27. Determinare tutti i numeri complessi z tali che $z^4 = \bar{z}^3$.

Esercizio 28. Dato un numero naturale n, descrivere tutti i numeri complessi z tali che $z^n = 1$ e tutti i numeri complessi z tali che $z^n = 2$.

Esercizio 29. Determinare tutti i numeri complessi z tali che

$$\frac{z - i}{z + i}$$

è un numero reale.

Esercizio 30. Determinare tutti i numeri complessi z tali che $e^z = e$.

Esercizio 31. Dimostrare che per ogni numero reale θ,

$$\sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}.$$

Esercizio 32. * Siano a, b, c, d quattro numeri complessi. Il loro birapporto è definito come

$$bir(a, b, c, d) = \frac{a - c}{a - d} \cdot \frac{b - d}{b - c}.$$

Fissati tre punti distinti a, b, c nel piano complesso, non allineati, determinare gli z tali che $bir(a, b, c, z)$ è un numero reale.

Esercizio 33. * Sia a, b, c tre numeri complessi. Dimostrare che a, b, c sono i vertici di un triangolo equilatero se e solo se

$$a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc = 0.$$

Esercizio 34. Risolvere le seguenti equazioni, dove $z \in \mathbb{C}$:

$$(z - \bar{z})^3 = i \qquad z^2 + (i - 1)z - i = 0 \qquad z^3 = iz\bar{z}$$

Esercizio 35. Sia a_n la successione definita per induzione da

$$\begin{cases} a_{n+2} = 7a_{n+1} - 10a_n; \\ a_0 = 4; \\ a_1 = 17. \end{cases}$$

Dare una formula per calcolare il termine n-esimo della successione sul modello di quanto abbiamo fatto con la successione di Fibonacci.

Esercizio 36. Sia a_n la successione definita per induzione da

$$\begin{cases} a_{n+1} = 1 + \frac{1}{a_n}; \\ a_0 = 1. \end{cases}$$

Calcolare l'ennesimo termine della successione.

Esercizio 37. Determinare la successione x_n definita per induzione da

$$\begin{cases} x_{n+1} = 6x_n - 13x_{n-1} \\ x_0 = 1 \\ x_1 = 3 \end{cases}$$

Esercizio 38. Calcolare, se esiste, il limite delle successioni

$$\frac{n - 6n^4}{1 + n + n^4} \qquad \frac{(-1)^n + 2}{(-1)^{n+1} - 2}$$

Esercizio 39. Sia a_n una successione di numeri reali. Dimostrare che se $\lim a_n = L$ con $L > 0$ allora $a_n > 0$ definitivamente.

Esercizio 40. Siano a_n e b_n due successioni di numeri reali convergenti. Dimostrare che se $a_n \leqslant b_n$ definitivamente allora $\lim a_n \leqslant \lim b_n$.

Esercizio 41. Dopo aver osservato che $0 \leqslant \frac{n!}{n^n} \leqslant \frac{1}{n}$ dimostrare che $\lim \frac{n!}{n^n} = 0$.

Esercizio 42. Calcolare il limite della successione $\frac{2^n}{n!}$.

Esercizio 43. Sia $1 < a$. Dimostrare che $\lim \sqrt[n]{a} = 1$. [Utilizzare la disuguaglianza dell'esercizio 15]. Dimostrare lo stesso risultato per $0 < a \leqslant 1$.

Esercizio 44. Si enuncino e dimostrino l'analogo dei punti 1,2,3 della proposizione dimostrata a lezione nel caso in cui il limite di a_n sia $-\infty$.

Esercizio 45. Sia a_n una sucessione a termini positivi e sia $\lim a_n = L$. Allora $\lim \sqrt{a_n} = \sqrt{L}$.

Esercizio 46. Si calcoli il limite delle seguenti successioni:

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n}, \qquad \frac{3^n + n^2}{2^n + n^3} \qquad \sqrt[n]{2^n + 3^n} \qquad (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})n.$$

Esercizio 47. Sia $a_n < 0$ per ogni n e sia $\lim a_n = 0$. Si dimostri che $\lim \frac{1}{a_n} = -\infty$.

Esercizio 48. Dare un esempio di una successione a_n tale che $a_n \neq 0$ per ogni n, $\lim a_n = 0$ e non esiste il limite di $\frac{1}{a_n}$.

Esercizio 49. Sia F_n la successione di Fibonacci. Si calcoli il limite di $\sqrt[n]{F_n}$.

Esercizio 50. Sia a_n la successione definita per induzione da

$$\begin{cases} a_{n+2} = 7a_{n+1} - 12a_n; \\ a_0 = 3; \\ a_1 = 11. \end{cases}$$

Dare una formula per calcolare il termine n-esimo della successione e calcolare il limite di $\sqrt[n]{a_n}$.

Esercizio 51. Sia $0 < \alpha < 1$ un numero reale fissato e sia a_n la succesione definita da

$$\begin{cases} a_0 = \alpha \\ a_{n+1} = \frac{1}{2}(\alpha + a_n^2) \end{cases}$$

Dimostrare che la successione è decrescente, e limitata. Se ne calcoli il limite.

Esercizio 52. Si dimostri che $\lim \sqrt[n]{n} = 1$. [dimostrare usando la disuguaglianza aritmogeometrica che per $n \geqslant 2$ si ha $\sqrt[n]{x} \leqslant 1 + \frac{2}{n}(\sqrt{2} - n)$]

Esercizio 53. Determinare, se esiste, il limite della successioni

$$\sqrt[n]{\frac{3^n + n^2}{5^n + 2^n}} \qquad \sqrt[n]{3^{2n} n^3} \qquad \frac{(n+1)! - n!}{n^2\, 3^n}.$$

Esercizio 54. Sia a_n la successione definita per induzione da

$$\begin{cases} a_{n+2} = 6a_{n+1} - 9a_n; \\ a_0 = -1; \\ a_1 = 3. \end{cases}$$

Dare una formula per calcolare il termine n-esimo della successione.

Esercizio 55. Sia a_n la successione definita per induzione da

$$\begin{cases} a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}; \\ a_0 = 0. \end{cases}$$

Si dimostri che $a_n \leqslant 2$ per ogni n e che la successione è crescente. Si calcoli il limite della successione.

Esercizio 56.

a) Dare un esempio di due successioni a_n e b_n tali che $\lim a_n = \lim b_n = \infty$ e $\lim a_n - b_n = 3$.
b) Dare un esempio di due successioni a_n e b_n tali che $\lim a_n = \lim b_n = \infty$ e $\lim a_n - b_n = -\infty$.
c) Dare un esempio di due successioni a_n e b_n tali che $\lim a_n = \lim b_n = \infty$ e $\lim a_n - b_n = \infty$.

Esercizio 57.

a) Sia a_n una successione convergente e sia $\lim a_n = \ell > 0$. Dimostrare che $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$.
b) Dare un esempio di una successione a termini positivi con $\lim a_n = \infty$ e tale che $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = 2$.

Esercizio 58.

a) Siano a_n due successioni convergenti con $a_n \leqslant b_n$ per ogni n. Si dimostri che $\lim a_n \leqslant \lim b_n$;
b) Dare un esempio di due successioni a_n e b_n talli che $a_n < b_n$ per ogni n e $\lim a_n = \lim b_n$.

Esercizio 59.

a) Sia a_n una successione convergente (ovvero che ha limite finito). Dimostrare che $\lim(a_{n+1} - a_n) = 0$.
b) Si dimostri che la successione a_n definita da

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{2n}}.$$

è tale che $\lim(a_{n+1} - a_n) = 0$ ma $\lim a_n = \infty$.

Esercizio 60. Al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ studiare la monotonia e la convergenza della successione definita da

$$\begin{cases} a_{n+1} = a_n^2; \\ a_0 = \alpha. \end{cases}$$

Esercizio 61. Sia a_n una successione con limite finito ℓ. Sia b_n la successione definita da

$$b_n = \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}.$$

Si dimostri che $\lim b_n = \ell$.

Esercizio 62. Sia a_n la successione $(-1)^n n$. Calcolare il limite delle sottosuccesioni di a_n a_{2n} e a_{2n+1}.

Esercizio 63. Descrivere una successione che non ha limite e tale che le sottosuccessioni a_{3n} e a_{3n+1} hanno limite finito e diverso e la sottosuccessione a_{3n+2} ha limite infinito.

Esercizio 64. Sia a_n una successione. Supponiamo che a_n abbia una sottosuccessione $a_{k(n)}$ che ha limite 2 e una sottosuccessione $a_{h(n)}$ che ha limite 3. Dimostrare che a_n non ha limite.

Esercizio 65 (Gara di divergenza)**.** Usando (una sola volta) i simboli

$$!\ n\ 2$$

e parentesi a piacere, costruire la successione una successione che tende a infinito molto velocemente.

Esercizio 66. Siano a_n e b_n due successioni mai nulle tali che $\lim a_n = \lim b_n = 0$. Si può dire qualcosa del limite di

$$\frac{a_n b_n}{a_n^2 + b_n^2}?$$

Giustificare la risposta con una dimostrazione o con degli esempi?

Esercizio 67. Sia a_n la successione definita per induzione da:

$$\begin{cases} a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{2}{a_n}\right); \\ a_0 = 12345. \end{cases}$$

Si dimostri che la successione è decrescente e se ne calcoli il limite.

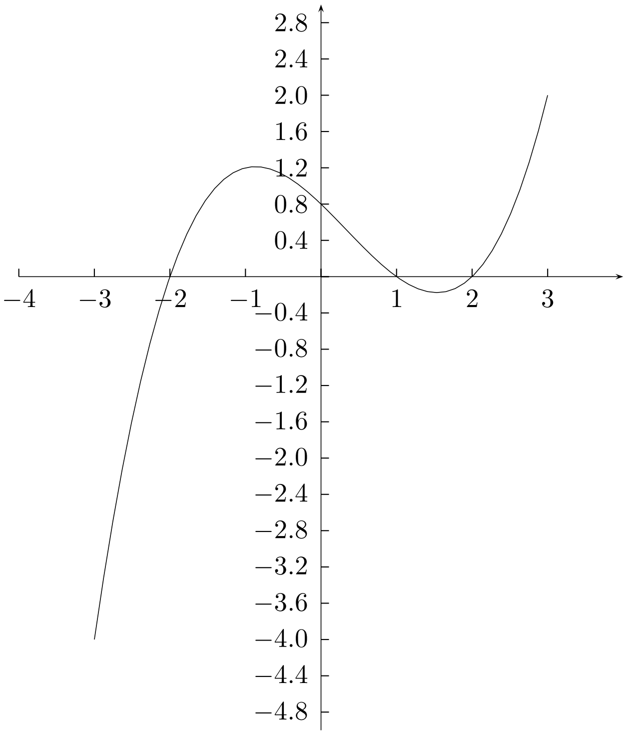
Esercizio 68. Si definisca una funzione $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tale che

(1) $\lim_{x\longrightarrow\infty} f(x) = \infty$;
(2) $\lim_{x\longrightarrow 1} f(x) = 2$;
(3) f sia crescente nell'intervallo $[3, \infty)$ e decrescente nell'intervallo $(-\infty, 3]$

Esercizio 69. (1) Esplicitare la definizione di limite nel caso $x_0 = \infty$ e L finito o infinito.
(2) Esplicitare cosa vuol dire che non è vero che $\lim_{x\longrightarrow\infty} f(x) = \infty$

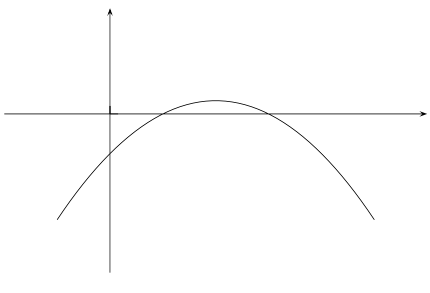
Esercizio 70. * Sia a_n una successione che non ha limite. Si dimostri che esiste una sottosuccessione di a_n con limite diverso da $+\infty$.

Esercizio 71. Sia $f : [-3, 3] \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione con il seguente grafico:



i) Qual'è l'immagine di f?
ii) Dire se f è iniettiva.
iii) Quanto vale $f(0)$?
iv) Per quali valori la funzione è zero?
v) Per quali valori la funzione è positiva?
vi) In quali intervalli la funzione è crescente e in quali decrescente?

Esercizio 72. Si consideri la seguente figura,



Di quale funzione potrebbe essere il grafico?

i) $f(x) = 3x + 2$;
ii) $f(x) = x^2 - 2x - \frac{3}{4}$;
iii) $f(x) = \frac{-x^2-2x-2}{5}$;
iv) $f(x) = \frac{-x^2+4x-3}{4}$;
v) $f(x) = -x^2 - 1$.

Esercizio 73. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ definita fa
$$f(x) = \frac{4x+3}{x}.$$
Dimostrare che è decrescente e calcolarne l'immagine.

Esercizio 74. Sia $A \subset \mathbb{R}$, $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ e sia x_0 un punto di accumulazione di A. Si dimostri che (se esiste) il limite $\lim_{x\longrightarrow x_0} f(x)$ è unico. Cosa succederebbe se uno estendesse la definizione di limite al coaso in cui x tenda ad un punto che non è di accumulazione per A?

Esercizio 75. Si calcolino, se esistono, i seguenti limiti:
$$\lim_{x\longrightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x} \qquad \lim_{x\longrightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x^2+1}}{x+1} \qquad \lim_{x\longrightarrow 0} \frac{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}}{\sin x}$$
$$\lim_{x\longrightarrow 0} \frac{|x|}{x} \qquad \lim_{x\longrightarrow 0} \frac{|x+2|-|x|-2}{x} \qquad \lim_{x\longrightarrow 0^+} \sqrt{\frac{1}{x(x+1)}+\frac{1}{4x^2}-\frac{1}{2x}} \qquad \lim_{x\longrightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\sin x}-1}{\sin x-1}$$
[Se necessario si può fare uso del risultato dell'esercizio 68 che è una variante del corollario dimostrato in classe.]

Esercizio 76. a) Si dia un esempio di due funzioni $f, g : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ tali che $\lim_{x\longrightarrow x_0} f(x) = \infty$, $\lim_{x\longrightarrow x_0} g(x) = \infty$ e $\lim_{x\longrightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$

b) Si dia un esempio di due funzioni $f, g : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ tali che $\lim_{x\longrightarrow x_0} f(x) = \infty$, $\lim_{x\longrightarrow x_0} g(x) = \infty$ e $\lim_{x\longrightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$

c) Si dia un esempio di due funzioni $f, g : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ tali che $\lim_{x\longrightarrow x_0} f(x) = \infty$, $\lim_{x\longrightarrow x_0} g(x) = \infty$ e $\lim_{x\longrightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$

d) Si dia un esempio di due funzioni $f, g : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ tali che $\lim_{x\longrightarrow x_0} f(x) = \infty$, $\lim_{x\longrightarrow x_0} g(x) = \infty$ e non esiste $\lim_{x\longrightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$.

Esercizio 77. Sia $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ e sia x_0 un punto di accumulazione per A. Sia $\lim_{x\longrightarrow x_0} f(x) = L \in \mathbb{R}$. Sia $B = A \cup \{x_0\}$ e sia $g : B \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da
$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \neq x_0; \\ L & \text{se } x = x_0. \end{cases}$$
Dimostrare che g è continua in x_0.

Esercizio 78. Dimostrare che se $\lim_{x\longrightarrow x_0} f(x) = \infty$ allora $\lim_{x\longrightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = 0$.

Esercizio 79. Sia $sgn(x)$ la funzione definita nel modo seguente:
$$sgn(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ -1 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$
Calcolare $\lim_{x\longrightarrow 0} |sgn(x)|$. Dire se $|sgn(x)|$ è continua in 0.

Esercizio 80. Siano $A, B \subset \mathbb{R}$ e sia $f : A \longrightarrow B$ e $g : B \longrightarrow \mathbb{R}$. Sia $x_0 \in A$. Sia $\lim_{x\longrightarrow x_0} f(x) = y_0$. Sia $y_0 \notin B$ un punto di accumulazione di B e sia $\lim_{y\longrightarrow y_0} g(y) = L$. Allora
$$\lim_{x\longrightarrow x_0} g \circ f(x) = L.$$

Esercizio 81. Nell'esercizio precedente cosa può succedere se $y_0 \in B$?

Esercizio 82. * Sia $A \subset \mathbb{R}$ e sia x_0 un suo punto di accumulazione. Sia $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$. Allora $\lim_{x\longrightarrow x_0} f(x) = L$ se e solo se per ogni successione a_n a valori in $A \setminus \{x_0\}$ con $\lim a_n = x_0$ si ha $\lim f(a_n) = L$.

Esercizio 83. Calcolare, se esistono, i seguenti limiti (quelli della prima riga sono più semplici, in questo caso specificare bene i risultati necessari per giustificare la risposta, quelli della seconda riga sono più complicati, e si può essere più sintetici nella risposta, per la terza riga si ricordi che $\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{e^x-1}{x}=1$):

$$\lim_{x\longrightarrow 1}\sin(e^x-e) \qquad \lim_{x\longrightarrow 1}\sqrt{\frac{\log(x)-1}{\log x-4}} \qquad \lim_{x\longrightarrow 0^+} e^{\frac{1}{x}} \qquad \lim_{x\longrightarrow 0} e^{\frac{1}{x}}$$

$$\lim_{x\longrightarrow 0^+}\frac{e^{\frac{1}{x}}+3}{e^{\frac{1}{x}}+1} \qquad \lim_{x\longrightarrow 0}\frac{e^{\frac{1}{x}}+1}{e^{\frac{1}{x}}+1} \qquad \lim_{x\longrightarrow 0^+} e^{\frac{1}{x}}\left(\sqrt{e^{2\frac{1}{x}}+1}-e^{\frac{1}{x}}\right)$$

$$\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{e^{-x}-1}{x} \qquad \lim_{x\longrightarrow 0}\frac{3x}{1-e^{2x}} \qquad \lim_{x\longrightarrow 0}\frac{e^{x^2}-1}{x}$$

Esercizio 84. Dare un esempio di un sottoinsieme A di $\mathbb{R}$ e di una funzione $f : A \longrightarrow [0,1]$ bigettiva tale che l'inversa non sia una funzione continua.

Esercizio 85. Dimostrare le seguenti proprietà della funzione esponenziale partendo dalla definizione e dai risultati dimostrati in classe:

(1) $\exp(-x)=\frac{1}{\exp(x)}$;
(2) $\exp(\frac{p}{q})=\sqrt[q]{e^p}$ per $p,q\in\mathbb{Z}$ e $q\neq 0$;
(3) * $\exp x \geqslant 1+x$ per ogni x;
(4) $\lim_{x\longrightarrow\infty}\exp(x)=+\infty$ (usare il punto precedente);
(5) $\lim_{x\longrightarrow -\infty}\exp(x)=0$ (usare 1 e il punto precedente).

Esercizio 86. * Sia $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ una funzione bigettiva e crescente (in particolare continua). Sia $f^{-1} : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ l'inversa di f. Si dimostri che

$$\lim_{x\longrightarrow 0} f^{-1}(x) = -\infty \qquad \lim_{x\longrightarrow\infty} f^{-1}(x)=\infty.$$

Esercizio 87. Si dimostrino le seguenti proprietà della funzione logaritmo:

(1) $\log(1)=0$;
(2) $\log(e)=1$;
(3) $\log(x\cdot y)=\log x+\log y$;
(4) $\log(x^{-1})=-\log x$;
(5) $\log(x^n)=n\log x$;
(6) $\lim_{x\longrightarrow 0}\log(x)=-\infty$;
(7) $\lim_{x\longrightarrow\infty}\log(x)=\infty$;
(8) tracciare un grafico approssimativo della funzione logaritmo.

Per (6) e (7) usare l'esercizio precedente.

Esercizio 88. Sia $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione polinomiale di grado 7. Dimostrare che esiste x_0 tale che $f(x_0)=0$.

Esercizio 89. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \longrightarrow \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x)=e^{-\frac{1}{x^2}}$. Dire se è possibile definire una funzione $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continua tale che $f(x)=g(x)$ per ogni $x\neq 0$. (usare l'esercizio 65)

Esercizio 90. Sia $f(x)=x^3+e^x$. Dire quanti sono gli x tali che $f(x)=0$.

Esercizio 91. * Sia $f(x)=x^2+e^x$. Dire quanti sono gli x tali che $f(x)=2$.

Esercizio 92. Si calcolino i seguenti limiti (si ricordi anche che $\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{\sin x}{x}=1$):

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\sqrt{x^2+2x}-x \qquad \lim_{x\longrightarrow 0}\frac{\sqrt{5+x}-\sqrt{5}}{x} \qquad \lim_{x\longrightarrow 0}\frac{\sqrt{1+2(e^x+3)}-3}{x}$$

$$\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{e^x-1}{\sin x} \qquad \lim_{x\longrightarrow 0^-}\frac{1+2^{\frac{1}{x}}}{3+2^{\frac{1}{x}}} \qquad \lim_{x\longrightarrow 1}\frac{x-1}{\log x}$$

$$\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{\sin(\sin x)}{x} \qquad \lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{e^x\sin(e^{-x}\sin x)}{x} \qquad \lim_{x\longrightarrow 0}\frac{\sin^4(\frac{3x}{2})}{e^{x^4}-\sqrt{3x^4+1}}$$

Esercizio 93. In relazione alla funzione dell'esercizio 59, dire quali sono i punti di massimo, minimo, massimo locale e minimo locale. Dire inoltre quale è il massimo e il minimo di f.

Esercizio 94. Si consideri la successione definita per induzione da:

$$\begin{cases} a_{n+1} = \sqrt{6a_n - 8}; \\ a_0 = a \end{cases}$$

Si calcoli il limite della successione al variare di $a \in [2, \infty)$.

Esercizio 95.
(1) Dare un esempio di una funzione continua definita su un intervallo limitato che non ha massimo.
(2) Dare un esempio di una funzione definita su un intervallo chiuso e limitato che non ha massimo.

Esercizio 96. * Dimostrare che per ogni intero k

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e.$$

(sappiamo che questo è vero se facciamo il limite sugli interi, ridursi a quel caso considerando la parte intera di x).

Esercizio 97. * Dimostrare che per ogni intero k

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{e^x}{x^k} = \infty.$$

(procede come per l'esercizio precedente.)

Esercizio 98. Dare un esempio di una funzione $f : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{R}$ continua che assume valori positivi e negativi ma non il valore zero.

Esercizio 99. Sia A un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ con le seguenti proprietà. A è limitato e ogni punto di accumulazione di A appartiene ad A. Sia $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua. Dimostrare che f ammette massimo e minimo.

Esercizio 100. Cosa è un punto di accumulazione di un sottoinsieme A di $\mathbb{R}$.

Esercizio 101. Dare la definizione di funzione crescente, decrescente, non crescente, non decrescente.

Esercizio 102. Dare la definizione di punto di massimo e minimo e di punto di massimo e minimo locale.

Esercizio 103. Dati $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, si determini esplicitamente la successione (a_n) definita ricorsivamente da

$$\begin{cases} a_{n+2} &= 2a_{n+1} + 3a_n \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \\ a_0 &= \alpha, \\ a_1 &= \beta. \end{cases}$$

Esercizio 104. Si dimostri che se $\lim_{x \longrightarrow \infty} f(x) = \infty$ e se $g(x) \geqslant 1$ per ogni x allora $\lim_{x \longrightarrow \infty} f(x)g(x) = \infty$.

Esercizio 105. Si dia la defnzione di funzione convessa e sia dia un esempio di funzione convessa e di una funzione non convessa.

Esercizio 106. * Siano $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$ numeri reali. Si determini il numero di soluzioni dell'equazione

$$\frac{1}{x - a_1} + \frac{1}{x - a_2} + \cdots + \frac{1}{x - a_n} = 0.$$

Esercizio 107. * Sia $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione convessa. Si dimostri che f è continua.

Esercizio 108. Si dia un esempio di una funzione $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ convessa ma non continua.

Esercizio 109. Calcolare la derivata delle seguenti funzioni

$$a(x) = x^{100} - x^{50} + 1 \qquad b(x) = \frac{x^1 0 - 5x^5 + 1}{3x^9 - 9x^3}$$

$$c(x) = \tan(x) = \frac{\sin x}{\cos x} \qquad d(x) = x \sin(x + \log x)$$

$$e(x) = e^{\cos^2 x} = e^{(\cos x)^2} \qquad f(x) = e^{\cos(x^2)}$$

$$g(x) = a^x \qquad h(x) = x^a$$

$$k(x) = x^x \qquad \ell(x) = \log(\sin(\cos x))$$

Esercizio 110. Sia $f:\mathbb{R}\setminus\{0\}\longrightarrow\mathbb{R}$ definita da $f(x)=\log|x|$. Si dimostri che
$$Df(x)=\frac{1}{x}$$

Esercizio 111. Si dimostri che la funzione $|x|$ non è derivabile in 0.

Esercizio 112. Si calcoli la derivata della funzione $f(x)=\sqrt{x}$ per $x\neq 0$.

Esercizio 113. Si consideri la funzione $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ definita da $f(x)=x^3$. f è una funzione derivabile e bigettiva. In quali punti la funzione inversa $g(x)=\sqrt[3]{(x)}$ è derivabile? Quanto vale la sua derivata?

Esercizio 114. 1) Calcolare $(1-i)^{24}$. 2) Risolvere $z^3=arg\,(z)+\frac{\pi}{6}$ e $z|z|=2\,Re\,(z)$.

Esercizio 115. Si studino le seguenti funzioni

(1) $f(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$;
(2) $g(x)=x\sin\frac{1}{x}$;
(3) $h(x)=x^2\sin\frac{1}{x}$;
(4) $k(x)=\frac{1+\sin x}{1-\cos x}$;
(5) $\ell(x)=\left(\frac{1+\tan x}{1-\tan x}\right)^{\frac{1}{\cos x}}$.

Esercizio 116. Determinare, se esistono, massimo e minimo delle funzioni

(1) $f(x)=\log x-\log^2 x$,
(2) $g(x)=\left(5+\frac{1}{x^2}-\frac{8}{x^3}\right)$.

Esercizio 117. Si consideri la funzione $f:[0,2]\longrightarrow[1,5]$. definita da $f(x)=x^2+1$. Si dimostri che è invertibile e si calcoli $Df^{-1}(2)$.

Esercizio 118. Sia $f:[0,3]\longrightarrow\mathbb{R}$ definita da $f(x)=e^x(x^2-5x+7)$. Trovare il massimo e il minimo di f

Esercizio 119. Sia $f:[0,\pi/2]\longrightarrow\mathbb{R}$ definita da $f(x)=\sin x\cos x$. Trovare il massimo e il minimo di f

Esercizio 120. Sia $m\in\mathbb{R}$. Determinare per quali $q\in\mathbb{R}$ l'equazione
$$e^x=mx+q$$
ha nessuna, una o due soluzioni.

Esercizio 121. Sia $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ una funzione derivabile tale che $f'(x)\neq 0$ per ogni $x\in(a,b)$. Dimostrare che $f(b)\neq f(a)$.

Esercizio 122. sia $f:(a,b)\longrightarrow\mathbb{R}$ una funzione continua. Sia $c\in(a,b)$ e sia f derivabile in ogni $x\neq c$. Supponiamo che esista finito $\ell=\lim_{x\longrightarrow c}f'(x)$. Allora f è deriviabile in c e $f'(c)=\ell$.

Esercizio 123. * Dare un esempio di due funzioni continue f,g e derivabili su un intervallo chiuso $[a,b]$ tali che $g(b)\neq g(a)$ e per le quali non esiste c interno all'intervallo tale che
$$\frac{f'(c)}{g'(c)}=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}.$$

Esercizio 124. Dimostrare che per ogni $x>0$ risulta $xe^{\frac{1}{\sqrt{x}}}>1$.

Esercizio 125. Calcolare i seguenti limiti usando la regola di de l'Hopital o l'approssimazione delle funzioni con i polinomi di Taylor.
$$\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{e^x-\cos x-x}{x^2}\qquad\qquad \lim_{x\longrightarrow 0}\frac{e^x-\cos x-x}{\sin x^2}$$
$$\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{\sin x\cos x-x}{(\sin x)^2}\qquad\qquad \lim_{x\longrightarrow 0}\frac{\log(\cos x)}{x^2}$$

Esercizio 126. Calcolare il polinomio di Taylor di grado 5 nel punto $x_0=0$ delle seguenti funzioni:
$$a(x)=(\sin x)^2\qquad\qquad b(x)=\sin x^2$$
$$c(x)=\tan x\qquad\qquad d(x)=3^{x+1}$$

Esercizio 127. Determinare un numero reale α tale che
$$\tan(x^3) - (\tan x)^3 = \alpha x^5 + o(x^5).$$

Esercizio 128. Sia $f(x)$ la funzione definita da
$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leqslant 0; \\ (\sin x)^3 & \text{se } x > 0 \end{cases}$$
Dire quante volte la funzione è derivabile.

Esercizio 129. * Sia $f(x)$ la funzione definita da
$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = 0; \\ e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{se } x > 0 \end{cases}$$
Dimostrare che f è derivabile infinite volte e che tutte le sue derivate in 0 si annullano.

Esercizio 130. Dimostrare che esiste un unico reale x_0 per il quale si annulla la funzione
$$f(x) = \frac{x-1}{1+x^2} + \arctan x.$$

Esercizio 131. Calcolare il polinomio di Taylor di grado 5 nel punto $x_0 = 0$ delle seguenti funzioni:
$$e(x) = x(\sin x)^2 \tan x \qquad f(x) = \sin x \log(1+x)$$
$$g(x) = \log(1-x^2) \qquad h(x) = \log(1-x^2)$$

Esercizio 132. Calcolare i seguenti limiti:
$$\lim_{x\longrightarrow 0} \frac{1}{x^2}\left(\frac{\sin x}{x} - \frac{x}{\sin x}\right) \qquad \lim_{x\longrightarrow 0} \frac{(e^x + e^{-x})^2 - 4x^2 - 4}{x^4}$$

Esercizio 133. Determinare un numero reale α tale che
$$(\arctan x)^5 - 2(\sin x)^5 + x^5 = \alpha x^9 + o(x^9)$$

Esercizio 134. Dare un esempio di una funzione definita su tutto $\mathbb{R}$ che sia derivabile due volte ma non tre.

Esercizio 135. Siano f, g due funzioni definite in un intorno di 0 Dimostrare le seguenti affermazioni
(1) se $f = o(g)$ e $g = o(h)$ allora $f = o(h)$;
(2) se $g\, o(f) = o(fg)$.

Esercizio 136. Sia $a \neq 0$. Calcolare la primitiva di $\frac{1}{(ax+b)^m}$. [porre $y = ax + b$]

Esercizio 137. Calcolare
$$\int_2^3 \frac{1}{x^2-1} dx$$
[scrivere $\frac{1}{x^2-1}$ nella forma $\frac{1}{ax+b} + \frac{1}{cx+d}$]

Esercizio 138. Calcolare
$$\int_2^3 \frac{3x^2}{x-1} dx.$$
[Scrivere $3x^2$ nella forma $(ax+b)(x-1) + c$]

Esercizio 139. Sia $I_n = \int_0^x \frac{1}{(1+t^2)^n} dt$. Integrando per parti trovare una formula che metta in relazione I_n e I_{n+1}.

Esercizio 140. Usando il risultato dell'esercizio precedente scrivere la primitiva di $\frac{1}{(x^2+1)^2}$.

Esercizio 141. Stimare $\sin 1$ con un errore massimo di $0,01$.

Esercizio 142. Calcolare
$$\int_0^1 \frac{x^3}{x^8+1} dx$$
[$y = x^4$]

Esercizio 143. Per quali valori di α è definito $\int_0^\infty e^{-\alpha x} dx$.

Esercizio 144. Si calcolino i seguenti integrali

$$a) \int_0^{\sqrt{\pi}} x \sin x^2 \, dx \qquad b) \int_0^1 x^3 \sqrt{2-x^2} \, dx$$

Esercizio 145. Si calcolino le primitive delle seguenti funzioni:

$a) e^{e^x+x}$ $\quad [y = e^x ...]$

$b) \dfrac{1}{e^{2x} - 2e^x}$

$c) \sin(\sqrt{x})$ $\quad [y = \sqrt{x} ...]$

$d) \dfrac{\sin 2x + \cos x}{1 + \sin x}$ $\quad [y = \sin x \, ricordarsi \; \sin 2x = 2 \sin x \cos x]$

$e) \dfrac{1}{x(x-1)}$

$f) \dfrac{1}{x^2(1+x)}$

$g) \dfrac{x+3}{x^3+3x^2+2x}$

$h) \dfrac{x^2-3}{(x+1)(x-1)^2}$

$i) \dfrac{1}{x^3(1+x)^2}$

$j) \dfrac{1}{x^2-2x+2}$

$k) \dfrac{1}{x^4-1}$

$l) x^5 e^{-x^3}$

Esercizio 146. Discutere la convergenza delle seguenti serie:

$$a) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{2^n} \qquad b) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{n^2} \qquad c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$$

$$d) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n^3+1)}} \qquad e) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{(2n)!} \qquad f) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+\cdots+n}{n^3}$$

Esercizio 147. Calcolare la somma delle seguenti serie telescopiche (o quasi)

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n^2+n}} \qquad b) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2-1} \qquad c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+\frac{1}{2}}{n^2(n+1)^2}$$

Esercizio 148. Dire per quali x la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{x^n}$ converge.

Esercizio 149. Dire per quali x la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{nx}}{n}$ converge.

Esercizio 150. Discutere la convergenza delle seguenti serie

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{1+\sqrt{n}} \right) \qquad b) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2-n} \qquad c) \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{ne^{-n}}$$

$$d) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} \qquad e) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n!}{n^3}$$

Esercizio 151. Calcolare i seguenti integrali impropri:

$$a) \int_1^{\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+5}} \, dx \qquad b) \int_0^{\infty} \frac{\arctan x}{1+x^2} \, dx \qquad c) \int_{\frac{1}{2}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}(2x+1)} \, dx$$

Esercizio 152. Dire per quali valori di a, b il seguente integrale improprio converge
$$\int_0^\infty \frac{1}{x^a(4x+9)^b}\,dx.$$

Esercizio 153. Dire se i seguenti integrali impropri convergono:
$$a)\int_4^5 \frac{1-3x}{\sqrt{x}-2}\,dx \qquad b)\int_0^1 \frac{\log(1+\sqrt{x})}{\sin x}\,dx \qquad c)\int_\infty^\infty \frac{1}{x^2+4x+9}\,dx$$

Esercizio 154. Dire per quali valori di a il seguente integrale improprio converge
$$\int_2^3 \frac{x(\sin(x-2))^a}{\sqrt{x^2-4}}\,dx$$

Esercizio 155. Dire per quali valori di a il seguente integrale improprio converge
$$\int_a^\infty \frac{1}{(x-2)\sqrt{|x-3|}}\,dx$$

Esercizio 156. Sia F la funzione definita nel seguente modo:
$$F(x) = \int_0^x (1+e^{-t^2})(4-t^2)dt$$
Si calcoli la derivata di F. Si determino gli intervalli in cui F é crescente o decrescente. Si determini il numero degli zeri di F.

Esercizio 157. Sia F la funzione definita nel seguente modo:
$$F(x) = \int_0^{x^2} e^t dt$$
Si determini la derivata di F.

Esercizio 158. Dire per quali valori di a il seguente integrale improprio converge
$$\int_0^\infty t^a e^{-t}\,dt$$

Esercizio 159. Studiare la convergenza e la convergenza assoluta delle seguenti serie:
$$a)\sum_{n=2}^\infty \log(1+\frac{(-1)^n}{n}) \qquad b)\sum_{n=2}^\infty \sin(\frac{(-1)^n}{\log n})$$
$$c)\sum_{n=2}^\infty \frac{(-1)^n}{n-\log n}) \qquad d)\sum_{n=2}^\infty (\frac{\pi}{2}-\arctan n)$$
$$e)\sum_{n=1}^\infty (\log(1+n)-\log n-\frac{1}{n}) \qquad f)\sum_{n=1}^\infty (e-(1+\frac{1}{n})^n)$$
Per il punto a) e b) e c) usare il criterio di Leibniz (per il punto a) per dimostrare che la successione a termini positivi associata è decrescente separare il caso n pari da n dispari, per il punto c) studiare la funzione $f(x) = x - \log x$). Per il punto d) dimostrare che $\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$.

Esercizio 160. Determinare il raggio di convergenza delle seguenti serie di potenze:
$$a)\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n2^n}x^n \qquad b)\sum_{n=1}^\infty \frac{3^n}{n^2}x^n \qquad c)\sum_{n=1}^\infty \frac{2^n}{n!}x^n$$
$$d)\sum_{n=1}^\infty (1+(-2)^n)x^n \qquad e)\sum_{n=1}^\infty \frac{n-1}{n+1}x^n \qquad f)\sum_{n=1}^\infty \frac{2^n}{\sqrt[n]{n}}x^n$$

Esercizio 161. Stimare $\log\frac{3}{2}$ con un errore inferiore a $0,1$.

Esercizio 162. Calcolare la serie $\sum_{n=0}^\infty n^3\frac{1}{3^n}$. [usare le derivate...]

1. Verifica intermedia del 7 novembre 2012

Esercizio 163. Sia a_n la successione definita per induzione nel modo seguente:

$$\begin{cases} a_{n+2} = 12a_{n+1} - 20a_n; \\ a_0 = 1; \\ a_1 = 18. \end{cases}$$

(a) Si determini una formula per il calcolo del termine ennesimo della successione;
(b) Si determini il limite della successione $\sqrt[n]{a_n}$.

Esercizio 164. (Variante del primo esercizio) Sia a_n la successione definita per induzione nel modo seguente:

$$\begin{cases} a_{n+2} = 12a_{n+1} - 35a_n; \\ a_0 = 1; \\ a_1 = 9. \end{cases}$$

(a) Si determini una formula per il calcolo del termine ennesimo della successione;
(b) Si determini il limite della successione $\sqrt[n]{a_n}$.

Esercizio 165.

(a) Si dia un esempio di una successione a_n con termini diversi da zero tale che $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$ e $\lim \frac{a_n}{n} = +\infty$;
(b) Sia a_n una successione a termini positivi tale che $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{2}$ si dimostri che $\lim a_n = 0$.

Esercizio 166. Sia a_n una successione a termini positivi tale che $\lim \frac{a_n}{n!} = +\infty$. È sempre vero che esiste il limite (finito o infinito) della successione $\frac{a_{n+1}}{a_n}$?

2. Soluzioni degli esercizi della prova intermedia

Commento alle soluzioni. Il compito è stato pensato più come un test di autovalutazione (per questo vale solo 10 punti su 100) che come una valutazione che secondo me in questo mese dell'anno non ha ancora molto senso.

Queste sono alcune indicazioni che possono essere utili per l'autovalutazione.

(1) chi non è riuscito a fare il primo esercizio non sta studiando a sufficienza o ha una preparazione di base che deve rafforzare;
(2) chi ha fatto il primo esercizio ma si è sentito perso nel resto del compito senza riuscire a fare altro, anche se sta studiando, in prospettiva deve capire le cose più a fondo e forse cambiare un poco il modo in cui studiare. Siamo all'inizio dell'anno e c'è tutto il tempo per farlo, però deve cercare di fare un qualche salto di qualità. A fine corso, una preparazione che permette di fare gli esercizi per la cui soluzione si è più o meno fornito un algoritmo risolutivo a lezione, senza una comprensione concettuale più profonda, potrebbe non essere sufficiente per passare l'esame.
(3) chi ha fatto il primo esercizio e il punto (a) del secondo esercizio, secondo me sta studiando e ha fondamentalmente capito anche le cose che abbiamo fatto. Deve forse solo entrare un po' di più in alcuni modi di ragionare e nel linguaggio che man mano si farà un po' più pesante. In altre parole direi deve fare attenzione un po' di più alla parte teorica cercando di capirne la struttura e le idee;
(4) chi ha fatto più di questo secondo me sta già studiando bene. Se non ha fatto tutto non mi preoccuperei, è solo mancata un poco di esperienza, ma piano piano sicuramente la svilupperà.

Naturalmente ci possono essere mille altre possibile combinazioni. Aldilà di come è andato il compito conta anche quanto vi sembra di essere lontani dalle soluzioni.

Soluzione esercizio 1 (prima versione). Cerchiamo le successioni b_n non nulle della forma λ^n che risolvono la regola induttiva: $b_{n+2} = 12b_{n+1} - 20b_n$. Sostituendo troviamo $\lambda^{n+2} = 12\lambda^{n+1} - 20\lambda^n$ da cui $\lambda^2 - 12\lambda + 20 = 0$ le cui soluzioni sono $\lambda_1 = 10$ e $\lambda_2 = 2$. Ricordiamo, come abbiamo verificato a lezione, che se b_n e c_n risolvono la regola induttiva allora anche una successione della forma $Bb_n + Cc_n$ la risolve. Cerchiamo quindi a_n della forma $a_n = B\,10^n + C\,2^n$. Imponendo le condizioni $a_0 = 1$ e $a_1 = 18$ troviamo

$$\begin{cases} B + C = 1 \\ 10\,B + 2\,C = 18 \end{cases}$$

da cui otteniamo $B = 2$ e $C = -1$. Quindi $a_n = 2 \cdot 10^n - 2^n$. Calcoliamo adesso il limite richiesto.

$$\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{2 \cdot 10^n - 2^n} = \sqrt[n]{10^n \left(2 - \left(\frac{2}{10}\right)^n\right)} = 10 \sqrt[n]{2 - \left(\frac{2}{10}\right)^n}.$$

Ora osserviamo che $\lim 2 - \left(\frac{2}{10}\right)^n = 2$, quindi $\lim \sqrt[n]{2 - \left(\frac{2}{10}\right)^n} = 1$, infatti, per quanto dimostrato a lezione se una successione ha limite finito e positivo la sua radice ennesima ha limite 1. Infine per la regola del prodotto otteniamo $\lim a_n = 10$.

Soluzione esercizio 1 (seconda versione). Cerchiamo le successioni b_n non nulle della forma λ^n che risolvono la regola induttiva: $b_{n+2} = 12b_{n+1} - 35b_n$. Sostituendo troviamo $\lambda^{n+2} = 12\lambda^{n+1} - 20\lambda^n$ da cui $\lambda^2 - 12\lambda + 35 = 0$ le cui soluzioni sono $\lambda_1 = 7$ e $\lambda_2 = 5$. Ricordiamo, come abbiamo verificato a lezione, che se b_n e c_n risolvono la regola induttiva allora anche una successione della forma $Bb_n + Cc_n$ la risolve. Cerchiamo quindi a_n della forma $a_n = B\,7^n + C\,5^n$. Imponendo le condizioni $a_0 = 1$ e $a_1 = 9$ troviamo

$$\begin{cases} B + C = 1 \\ 7\,B + 5\,C = 9 \end{cases}$$

da cui otteniamo $B = 2$ e $C = -1$. Quindi $a_n = 2 \cdot 7^n - 5^n$. Calcoliamo adesso il limite richiesto

$$\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{2 \cdot 7^n - 5^n} = \sqrt[n]{7^n \left(2 - \left(\frac{5}{7}\right)^n\right)} = 7 \sqrt[n]{2 - \left(\frac{5}{7}\right)^n}.$$

Ora osserviamo che $\lim 2 - \left(\frac{5}{7}\right)^n = 2$, quindi $\lim \sqrt[n]{2 - \left(\frac{5}{7}\right)^n} = 1$, infatti, per quanto dimostrato a lezione su una successione ha limite finito e positivo la sua radice ennesima ha limite 1. Infine per la regola del prodotto otteniamo $\lim a_n = 7$.

Soluzione esercizio 2. La successione

$$a_n = n^2$$

ha le proprietá richieste nel punto (a).

Dimostriamo adesso l'affermazione del punto (b). Da $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{2}$ ricaviamo che esiste n_0 tale che $\frac{a_{n+1}}{a_n} - \frac{1}{2} < \frac{1}{4}$ per $n \geqslant n_0$. Da questa equazione ricaviamo $0 < a_{n+1} < \frac{3}{4}a_n$ per $n \geqslant n_0$ e quindi per induzione

$$0 < a_n < a_{n_0}(\frac{3}{4})^{n-n_0}$$

per ogni $n \geqslant n_0$. Abbiamo cosí dimostrato che la successione a_n è definitivamente compresa tra due successioni che tendono a 0, quindi tende anche essa a 0.

Soluzione esercizio 3. Costruiamo una successione a_n tale che $\lim \frac{a_n}{n!} = \infty$ e per la quale non esiste il limite di $\frac{a_{n+1}}{a_n}$. Definiamo

$$a_n = \begin{cases} n^n & \text{se } n \text{ è pari;} \\ (n+1)^{n+1} & \text{se } n \text{ è dispari.} \end{cases}$$

In particolare $a_n \geqslant n^n$ e quindi $\frac{a_n}{n!} > \frac{n^n}{n!}$ da cui $\lim \frac{a_n}{n!} = \infty$.

Inoltre

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \begin{cases} \frac{(n+2)^{n+2}}{n^n} > n^2 & \text{se } n \text{ é pari;} \\ 1 & \text{se } n \text{ è dispari.} \end{cases}$$

In particolare non esiste il limite della succesione $\frac{a_{n+1}}{a_n}$.

3. II compitino, 21 dicembre 2012

Esercizio 167. Si calcoli il seguente limite

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{e^x + 3} - 2}{x}.$$

Esercizio 168. Si consideri la seguente successione definita per induzione

$$\begin{cases} a_{n+1} = a_n^2 - \frac{3}{2}a_n + \frac{3}{2}; \\ a_0 = \frac{5}{4} \end{cases}$$

Se ne calcoli il limite.

Esercizio 169. Sia $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.

a) Cosa vuol dire che $\lim_{x\to 2} f(x) = 3$? (scrivere la definizione per esteso e stando attenti ai dettagli);
b) Dimostrare, usando solo la definizione, che se $\lim_{x\longrightarrow 2} f(x) = 3$ allora $\lim_{x\longrightarrow 0} f(2 + x^2) = 3$;
c) Dare un esempio di due funzioni $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tali che

$$\lim_{x\longrightarrow 0} f(x) = \lim_{y\longrightarrow 0} g(y) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x\longrightarrow 0} g(f(x)) = 1.$$

Esercizio 170. Sia $f : (-\infty, 0] \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione crescente. Dimostrare che esiste $\lim_{x\longrightarrow 0} f(x)$ e che tale limite è finito.

Soluzioni del II compitino

Commento alle soluzioni. Valgono piò o meno commenti simili all'altra volta:

(1) chi non è riuscito a fare il primo esercizio e il 3a) non sta studiando o sta studiando troppo poco;
(2) chi è riuscito a fare il 2a) ma non il 2b) deve studiare di più e con molta più attenzione la parte di teoria, il 2b) era un caso particolare di un teorema fatto a lezione in due forme diverse. Come indicazione generale i teoremi fatti a lezione uno si aspetta che li sappiate piuttosto bene;
(3) il secondo esercizio lo considero un esercizio medio, standard ma non facilissimo perché la strategia è più articolata rispetto, per esempio, al primo esercizio. Diciamo come parte facile mi sarei aspettato che trasparisse un minimo una strategia;
(4) dai risultati la mia impressione generale è che in linea di massima venga presa un poco sottogamba la parte più concettuale del corso, come, per esempio, non sapere definizione fondamentali come quella di limite.

Soluzione esercizio 1. Razionalizzando l'espressione otteniamo

$$\frac{\sqrt{e^x+3}-2}{x} = \frac{e^x-1}{x} \cdot \frac{1}{(\sqrt{e^x+3}+2)}$$

Per x che tende a zero, sappiamo che il primo termine di questa espressione tende ad 1. Il numeratore del secondo termine tende ad 1 ed il denominatore, essendo la funzione esponenziale e la radice quadrata funzioni continue tende a $\sqrt{e^0+3}+2 = 4$. Quindi

$$\lim_{x\longrightarrow 0} \frac{\sqrt{e^x+3}-2}{x} = \frac{1}{4}.$$

Soluzione esercizio 2. Dimostriamo che la successione è decrescente e limitata. Studiamo quando $a_{n+1} < a_n$. Se indichiamo a_n con x otteniamo

$$x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{3}{2} < x \quad \text{ovvero} \quad (x-1)(x-\frac{3}{2}) < 0$$

ovvero $x \in (1, \frac{3}{2}) = I$. Quindi se $1 < a_n < \frac{3}{2}$ allora $a_{n+1} < a_n$.

Dimostriamo per induzione che $a_n \in (1, \frac{3}{2})$ per ogni n. Per $n = 1$ è vero. Per $n \geqslant 1$ supponiamo che $a_n \in (1, \frac{3}{2})$ e dimostriamo che $a_{n+1} \in (1, \frac{3}{2})$. Se indichiamo a_n con x otteniamo $1 < x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{3}{2} < \frac{3}{2}$ ovvero

$$0 < x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad x^2 - \frac{3}{2}x < 0$$

la prima disequazione è equivalente a $x < \frac{1}{2}$ o $x > 1$ e la seconda a $x \in (0, \frac{3}{2})$. Entrambe sono verificate per $x \in (1, \frac{3}{2})$.

Quindi esiste il limite della successione e lo indichiamo con ℓ. Inoltre essendo la successione decrescente e maggiore di 1 sappiamo che ℓ è maggiore o uguale a 1 e minore di $\frac{5}{4}$.

Facendo il limite a destra e sinistra dell'equazione $a_{n+1} = a_n^2 - \frac{3}{2}a_n + \frac{3}{2}$ otteniamo $\ell = \ell^2 - \frac{3}{2}\ell + \frac{3}{2}$ ovvero $\ell = 1$ o $\ell = \frac{3}{2}$. Poiché il limite è minore o uguale a $\frac{5}{4}$ otteniamo $\ell = 1$.

Soluzione esercizio 3. a) Sia $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, allora il limite per x che tende a 2 della funzione $f(x)$ è uguale a 3 se e solo se (la risposta inizia qui) per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che se $x \neq 2$ e $|x-2| < \delta$ allora $|f(x) - 3| < \varepsilon$.

b) Sia $\varepsilon > 0$, allora dalla definizione di limite sappiamo che esiste $\delta > 0$ tale che se $|y-2| < \delta$ e $y \neq 2$ allora $|f(y) - 3| < \varepsilon$. Fissiamo un tale δ.

Scegliamo adesso $\gamma = \sqrt{\delta}$ allora $\gamma > 0$ e per $|x| < \gamma$ abbiamo che $|x^2| < \delta$ quindi se poniamo $y = 2+x^2$ abbiamo $|y-2| = |x^2| < \delta$. Inoltre se $x \neq 0$ abbiamo $y \neq 2$, quindi se $|x| < \gamma$ e $x \neq 0$ allora $|f(y)-3| < \varepsilon$.

Abbiamo quindi mostrato che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\gamma > 0$ tale che se $|x| < \gamma$ e $x \neq 0$ allora $|f(2+x^2) - 3| < \varepsilon$, ovvero che $\lim_{x \longrightarrow 0} f(2+x^2) = 3$.

c) Sia $f(x) = 0$ per ogni x e sia $g(x)$ definita da

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x = 0; \\ 0 & \text{se } x \neq 0. \end{cases}$$

In particolare abbiamo che $g \circ f(x) = 1$ per ogni x e quindi le due funzioni soddisfano le richieste.

Soluzione esercizio 4. Sia $B = \{f(x) : x < 0\}$. Si noti che tale insieme è limitato superiormente da $f(0)$ perché $f(x) < f(0)$ per ogni $x < 0$ essendo la funzione crescente. Quindi $L = \sup B < \infty$. Dimostriamo che $\lim_{x \longrightarrow 0} f(x) = L$.

Sia $\varepsilon > 0$. Per definizione di estremo superiore esiste $b \in B$ tale che $b > L - \varepsilon$. Sia $b = f(x_1)$ con $x_1 < 0$. Poniamo $\delta = -x_1$, quindi $\delta > 0$. Infine osserviamo che se $|x| < \delta$ e $x \neq 0$ e $x \in (0, \infty]$ allora abbiamo $x_1 < x < 0$, in particolare $f(x) \in B$, quindi

$$L - \varepsilon < f(x_1) < f(x) \leqslant L < L + \varepsilon$$

da cui $|f(x) - L| < \varepsilon$.

4. Compitino 4 aprile 2013

Esercizio 171. Sia $z = 3 + 4i$ si calcolino $|z|$, z^{-1} e $\bar{z}$.

Esercizio 172. Sia data la funzione:

$$g(x) = \frac{\log(1+x) - x}{x^2}$$

Si descriva il dominio di definizione di g e si dica se g si possa estendere in modo continuo agli estremi del dominio di definizione. In caso tale estensione esista si dica inoltre se l'estensione è derivabile.

Esercizio 173. Sia $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.

a) Dare la definizione di "f è derivabile in 0".
b) Si supponga che f sia derivabile in 0 e si supponga che 0 sia un punto di massimo. Si dimostri che $f'(0) = 0$.

Esercizio 174. Si consideri la funzione $f(x) = e^x - 3x^2$ e sia $g(x)$ la sua derivata.

a) Mostrare che la funzione $g(x)$ ha esattamente due zeri.
b) Quanti zeri ha la funzione $f(x)$?

Esercizio 175. Sia $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione derivabile in ogni punto. Si supponga che $f'(x) = 2$ per ogni x e che $f(0) = 0$. Si dimostri che $f(x) = 2x$.

Soluzioni

Soluzione esercizio 1. $|z| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$.
$\bar{z} = 3 - 4i$.
$z^{-1} = \frac{3}{25} - \frac{4}{25}i$.

Soluzione esercizio 2. L'espressione che definisce g è definita per $x \neq 0$ e $1 + x > 0$. Quindi

$$Dominio(g) = (-1, \infty) \setminus \{0\}.$$

Per x che tende a -1 abbiamo che $1 + x$ tende a zero e quindi $\log(1+x)$ tende a $-\infty$ mentre $-x$ e x^2 tendono a 1. Quindi $g(x)$ tende a $-\infty$. In particolare la funzione g non si può estendere con continuità in -1.

Per studiare il limite di g per x che tende a zero utilizziamo l'approssimazione di $\log(1+x)$ mediante i polinomi di Taylor. Abbiamo

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

da cui

$$\lim_{x \longrightarrow 0} g(x) = \lim_{x \longrightarrow 0} \frac{x - \frac{x^2}{2} + o(x^2) - x}{x^2} = \lim_{x \longrightarrow 0} -\frac{1}{2} + \frac{o(x^2)}{x^2} = -\frac{1}{2}.$$

In particolare la funzione si può estendere con continuità in 0 ponendo $g(0) = \frac{1}{2}$. La funzione è derivabile per $x \neq 0$. Per studiare derivabilità dell'estensione in zero calcoliamo il limite del rapporto incrementale

$$\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{g(x) - \frac{1}{2}}{x} = \lim_{x \longrightarrow 0} \frac{\log(1+x) - x + \frac{x^2}{2}}{x^3}.$$

Per calcolare questo limite usiamo di nuovo l'approssimazione di $\log(1+x)$ questa volta con il polinomio di Taylor di terzo grado. Abbiamo

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

da cui per il limite del rapporto incrementale otteniamo

$$\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3) - x + \frac{x^2}{2}}{x^3} = \lim_{x \longrightarrow 0} \frac{1}{3} + \frac{o(x^3)}{x^3} = \frac{1}{3}.$$

Quindi la funzione è derivabile

Soluzione esercizio 3. a) La funzione f è derivabile in 0 se esiste finito il limite del rapporto incrementale

$$\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x}.$$

b) Sia 0 un punto di massimo per la funzione f quindi $f(x) \geqslant f(0)$ per ogni x ovvero $f(x) - f(0) \geqslant 0$ per ogni x. Poiché la funzione è derivabile in zero esiste il rapporto incrementale e abbiamo che

$$f'(0) = \lim_{x \longrightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \longrightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x}.$$

Da $f(x) - f(0) \geqslant 0$ per $x < 0$ otteniamo

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} \leqslant 0 \text{ da cui } f'(0) = \lim_{x \longrightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} \leqslant 0.$$

Similmente per $x > 0$ otteniamo

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} \geqslant 0 \text{ da cui } f'(0) = \lim_{x \longrightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} \geqslant 0.$$

Quindi $f'(0) = 0$.

Soluzione esercizio 4. a) Derivando f otteniamo $g(x) = e^x - 6x$. Per calcolarne il numero di zeri studiamo dove la funzione è crescente e dove è decrescente. Calcolando $g'(x)$ otteniamo $e^x - 6$ quindi $g'(x) > 0$ se e solo se $x > \log 6$ e $g'(x) < 0$ se e solo se $x < \log 6$. Da questo deduciamo che la funzione è decrescente in $(-\infty, \log 6]$ e crescente in $[\log 6, \infty)$. In particolare la funzione può avere al massimo due zeri. Inoltre osserviamo che $g(0) = 1 > 0$, che $\lim_{x \longrightarrow \infty} g(x) = \infty$ e che $g(\log 6) = 6 - 6 \log 6 < 0$. Quindi per il teorema di Bolzano g ha esattamente due zeri che indichiamo con x_1 e x_2.

b) Dallo studio precedente ricaviamo che $f(x)$ è crescente nell'intervallo $(-\infty, x_1]$ e nell'intervallo $[x_2, \infty)$ e che è decrescente nell'intervallo $[x_1, x_2]$. Quindi al massimo f ha tre zeri. Osserviamo inoltre che

$$\lim_{x \longrightarrow -\infty} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x \longrightarrow \infty} f(x) = \infty.$$

Inoltre $f(0) = 1 > 0$ e $f(1) = e - 3 < 0$. Quindi per il teorema di Bolzano f ha esattamente tre zeri.

Soluzione esercizio 5. Sia x un punto diverso da zero. Per il teorema di Lagrange esiste y compreso tra 0 e x tale che

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} = f'(y) = 2.$$

Quindi, usando $f(0) = 0$, otteniamo $\frac{f(x)}{x} = 2$ da cui $f(x) = 2x$.

5. Analisi Matematica, corso A, anno 2012-2013, IV compitino, 29 maggio 2013

Scrivere nome, cognome e matricola in bella grafia su tutti i fogli che vi sono stati consegnati.

Esercizio 176. Si dica se il seguente integrale improprio è convergente

$$\int_0^1 \frac{1}{\sin x} dx.$$

Esercizio 177. a) Dare la definizione di serie convergente.

b) Sia a_n una successione a termini positivi e sia $a_{n+1} < \frac{a_n}{2}$ per ogni n. Dimostrare che la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge.

Esercizio 178. Determinare una primitiva della funzione

$$f(x) = \frac{1}{x(1 + (\log x)^2)}.$$

Esercizio 179. Si dica per quali x la seguente serie è convergente

$$\sum_{n=0}^{\infty} (2^n + n)x^n.$$

Esercizio 180. Sia $F(x)$ la funzione definita da $F(x) = \int_0^x \sin(t + t^2)\, dt$. Si calcoli

$$\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{F(x) - F(0)}{x} \quad \text{e} \quad \lim_{x \longrightarrow 0} \frac{F(x)}{x^2}.$$

6. Soluzioni

Esercizio 1. Osserviamo che nell'intervallo $(0, 1]$ la funzione $\sin x$ è continua e strettamente positiva, quindi lo è anche la funzione $1/\sin(x)$. Per determinare la convergenza dell'integrale la confrontiamo con la funzione $1/x$.

Osserviamo che

$$\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{1/x}{1/\sin x} = \lim_{x \longrightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1,$$

quindi la convergenza dell'integrale proposto nell'esercizio è equivalente a quella dell'integrale $\int_0^1 \frac{1}{x}\, dx$ che sappiamo non convergere.

Esercizio 2. a) Sia a_n una successione di numeri reali e sia S_n la successione delle somme parziali di a_n:

$$S_n = \sum_{i=0}^{n} a_i.$$

Si dice che la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge se esiste finito il limite della successione S_n.

b) Osserviamo che abbiamo $a_n \leqslant \frac{a_0}{2^n}$ per ogni n. Infatti ragionando per induzione otteniamo che per $n = 0$ questa affermazione é vera e se é vera per n allora

$$a_{n+1} < \frac{1}{2} a_n \leqslant \frac{1}{2} \frac{a_0}{2^n} = \frac{a_0}{2^{n+1}}$$

e quindi é vera anche per $n + 1$. Poiché la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_0}{2^n}$ é convergente, per il criterio del confronto, otteniamo che anche la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ é convergente.

Esercizio 3. Poniamo $y = \log x$, abbiamo $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$ da cui

$$\int \frac{1}{x(1 + (\log x)^2)} dx = \int \frac{1}{1 + y^2} dy = \arctan(y) = \arctan(\log x).$$

Esercizio 4. Si tratta di una serie di potenze. Calcoliamo inanzittutto il raggio di convergenza. Per determinare il raggio di convergeza basta studiare il caso in cui $x > 0$. In questo caso si tratta di una serie a termini positivi. Calcoliamo il limite del rapporto di due termini successivi. Otteniamo

$$\lim \frac{(2^{n+1} + n + 1)x^{n+1}}{(2^n + n)x^n} = \lim \frac{2 + \frac{n+1}{2^n}}{1 + \frac{n}{2^n}} x = 2x$$

Applicando il criterio del rapporto otteniamo che la serie converge per $0 \leqslant x < 1/2$ e diverge per $x > 1/2$. Quindi il raggio di convergenza è $1/2$. Inoltre per $x = \pm 1/2$ otteniamo la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\pm 1)^n (1 + \frac{n}{2^n})$$

il cui termine generale non tende a zero, quindi non è convergente.

Quindi la serie è convergente per $|x| < 1/2$ e non convergente altrimenti.

Esercizio 5. Osserviamo che F è derivabile e che abbiamo $DF(x) = \sin(x + x^2)$. Inoltre $D^2F(x) = (1 + 2x)\cos(x + x^2)$. Quindi il polinomio di Taylor di secondo grado calcolato per $x = 0$ è il polinomio $P(x) = F(0) + DF(0)x + \frac{D^2F(0)}{2}x^2 = \frac{x^2}{2}$ e quindi abbiamo $F(x) = \frac{x^2}{2} + o(x^2)$.

Abbiamo quindi che $\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{F(x)}{x} = 0$ e $\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{F(x)}{x^2} = 1/2$.

7. Compito di Analisi Matematica, corso A, anno 2012-2013, scritto del 3 giugno 2013

Esercizio 1. Calcolare

$$\int_0^1 \frac{1}{e^x + 1}\, dx.$$

Esercizio 2. Determinare i punti di massimo e i punti di minimo della funzione $f : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da: da:

$$f(x) = \frac{\sin x}{\cos x + \sqrt{2}}$$

Esercizio 3. Studiare la convergenza e la convergenza assoluta della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \log(1 + \frac{1}{n}).$$

Esercizio 4. Siano $F(x)$ e $G(x)$ le funzioni definite nel modo seguente:

$$F(x) = \int_1^x e^{t^2}\, dt \qquad \text{e} \qquad G(x) = \int_0^x F(t)\, dt$$

[si noti che l'integrale con il quale è definita F è da 1 a x e non da 0 a x.]

(1) quanti zeri ha la funzione F?
(2) quanti zeri ha la funzione G?

8. Compito di Analisi Matematica, corso A, anno 2012-2013, scritto dell' 1 luglio 2013

Esercizio 1. Si dica se il seguente integrale improprio è convergente:

$$\int_0^1 \frac{1}{x - \sin x}\, dx.$$

Esercizio 2. Dire per quali x la seguente serie converge

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2 + 2}{n^3 + 3} x^n.$$

Esercizio 3.

(1) Sia $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione. Cosa vuol dire che g è continua in 1 (dare la definizione).
(2) Sia f la funzione definita da

$$f(x) = \arctan x - \frac{1}{1 + x^2}.$$

Dire quanti zeri ha la funzione f.

Esercizio 4. Sia $f(x)$ la funzione definita da

$$f(x) = \log\left(x + \sqrt{1 - x^2}\right).$$

Determinare il dominio di definizione di f e dire se la funzione si può estendere con continuità agli estremi del dominio di definizione.

Si determinino inoltre i punti nei quali f è derivabile.