Programma di Analisi IV - Corso di laurea in Fisica a.a. 2009/2010 - V. Magnani

- **Risultati generali per equazioni differenziali ordinarie.** Teorema delle contrazioni. Teorema di esistenza ed unicità locale per campi localmente Lipschitziani. Soluzioni massimali. Teorema di estensione globale per campi con crescita al più affine. Teorema di prolungamento dei grafici di soluzioni massimali oltre ai compatti. Teorema del confronto e Lemma di Gronwall. Equivalenza tra equazioni di ordine n e sistemi di n equazioni del primo ordine. Tecnica della riduzione dell'ordine per un'equazione differenziale a coefficienti non costanti. Teorema di esistenza su un intervallo dipendente dal compatto ove variano i dati iniziali. Teorema di dipendenza continua delle soluzioni dai dati iniziali. Teorema di dipendenza differenziabile delle soluzioni dai dati iniziali (*).

- **Equazioni differenziali lineari.** Esponenziale di un operatore in spazi di Banach. Commutatore di operatori. Derivabilità dell'esponenziale rispetto parametro lineare all'esponente. Formula per le soluzioni di sistemi lineari a coefficienti costanti tramite le proprietà algebriche degli autospazi invarianti. Matrice di transizione per sistemi lineari omogenei a coefficienti continui e sue proprietà. Risoluzione di sistemi lineari non omogenei a coefficienti continui tramite la matrice di transizione. Matrice wronskiana associata ad una base di soluzioni e suo wronskiano. Equazione differenziale del wronskiano (Teorema di Liouville).

- **Sistemi autonomi e stabilità.** Invarianza per traslazione temporale nelle soluzioni di sistemi autonomi. Le orbite di soluzioni distinte di sistemi autonomi sono disgiunte. Integrali primi di sistemi autonomi. Nozione di stabilità e stabilità asintotica. Un sistema lineare ha soluzioni stabili se e solo se non possiede autovalori con parte reale positiva e quelli con parte reale nulla hanno molteplicità algebrica uguale a quella geometrica. Un punto di equilibrio di un sistema non lineare è stabile ed asintoticamente stabile se il suo linearizzato ha tutti gli autovalori con parte reale negativa. Nozione di flusso associato ad un sistema autonomo e sue proprietà (*). Il flusso associato a campi con divergenza nulla preserva il volume. Applicazione ai sistemi hamiltoniani.

- **Studio di mappe tra spazi euclidei.** Condizioni sufficienti per la lipschitzianità di mappe di classe C^1. Omeomorfismi locali e diffeomorfismi locali. Teorema della mappa inversa. Insieme critico di una mappa. Fuori dall'insieme critico una mappa C^1 è un diffeomorfismo locale. Applicazione alla risolubilità locale di sistemi di equazioni non lineari. Topologia indotta, insiemi connessi e connessi per archi. Mappe aperte, chiuse e proprie. Una mappa propria e continua è chiusa. Una mappa aperta, propria e continua a valori in un connesso è suriettiva. Teoremi di invertibilità globale (*).

Applicazioni alla risolubilità globale di sistemi di equazioni non lineari. Teorema della mappa implicita.

- **Sottovarietà di spazi euclidei.** Nozione di sottovarietà k-dimensionale (o k-superficie) in uno spazio euclideo n-dimensionale. Spazio tangente ad una k-sottovarietà. La spazio tangente in un punto corrisponde all'insieme di tutte le velocità in quel punto di tutte le curve contenute nella k-superficie. Componenti connesse di sottovarietà. Carte locali e atlanti relativi a sottovarietà. Ogni sottovarietà ammette un atlante. Un punto ove il differenziale di una mappa C^1 è iniettivo possiede un intorno la cui immagine è una sottovarietà. Un insieme che ammette un atlante è una sottovarietà (**).

- **Spazi duali e funzioni differenziabili su sottovarietà.** Nozione di duale di uno spazio vettoriale, duale ortogonale di un sottospazio vettoriale, base duale e sue proprietà. Punto critico di una funzione su una k-sottovarietà. Caratterizzazione dei punti critici tramite il sistema dei moltiplicatori di Lagrange. I punti di massimo e minimo locale di funzioni su sottovarietà sono critici. Nozione di differenziale di funzioni su superfici e tra superfici.

- **Algebra multilineare.** Funzioni multilineari e alternanti. Permutazioni, trasposizioni e segno di una permutazione. Il numero di trasposizioni che compongono una permutazione o è sempre pari o è sempre dispari (**). Segno di una permutazione e sue proprietà (*). Caratterizzazione delle forme alternanti tramite permutazioni. Delta di Kronecker generalizzata a multi-indici con segno. Formula per il determinante di una matrice tramite l'utilizzo di permutazioni (**). Determinazione di una base canonica nello spazio delle funzioni k-lineari alternanti, ovvero dei k-covettori. Prodotto esterno tra k-covettori ed l-covettori e relative proprietà algebriche. Nozione di k-vettore come funzionale lineare nello spazio dei k-covettori. Base canonica dei k-vettori, loro prodotto esterno e nozione di k-vettore semplice. Applicazione canonica in dualità di k-covettori a k-vettori. Isomorfismo tra k-vettori e k-covettori tramite un prodotto scalare. Formula per il prodotto esterno di k-vettori rispetto un sistema di coordinate (*). Nozione di prodotto scalare nello spazio dei k-vettori. Nozione di k-sottospazio vettoriale orientato da un k-vettore unitario. Teorema di Riesz per mappe lineari continue su spazi di Hilbert (**). Definizione dell'operatore di Hodge su k-vettori di una spazio di Hilbert n-dimensionale orientato e sue proprietà (**).

- **Forme differenziali in spazi euclidei e su sottovarietà.** Nozione di k-forma differenziale in un aperto di $\mathbb{R}^n$. Definizione del prodotto esterno di forme differenziali e del differenziale esterno. Formula per il differenziale esterno di un prodotto esterno di forme differenziali. La doppia applicazione del differenziale esterno dà una forma differenziale identicamente nulla. Forme differenziali chiuse ed esatte. Formula per il pull-back di forme differenziali e pull-back di un prodotto di forme. Commutazione del pull-back con la differenzazione esterna. Invarianza dell'esattezza e della chiusura per cambi di coordinate. Nozione di k-forma su una m-superficie e pull-back di forme differenziali su varietà. Nozione di differenziale di una k-forma su una m-superficie.

- **Sottovarietà orientate con o senza bordo.** Nozione di carta di bordo, definizione di k-sottovarietà con bordo e del suo bordo. Il bordo di una k-sottovarietà con bordo è una (k-1)-sottovarietà (**). Nozione di k-sottovarietà (con o senza bordo) orientata tramite l'esistenza di un k-vettore ovunque tangente non-nullo e continuo. Il nastro di Möbius. Carte locali coorientate e atlanti orientati. Una varietà con o senza bordo è orientata se e solo se ammette un atlante orientato (*). Il bordo di una k-sottovarietà orientata con bordo è una (k-1)-sottovarietà orientata (*). Definizione di orientazione indotta sul bordo da una sottovarietà con bordo orientata.

- **Integrazione su sottovarietà.** Formula che lega la misura di Hausdorff k-dimensionale di un k-parallelepipedo con la norma del corrispondente k-vettore (**). Definizione di jacobiano di una mappa tramite la norma dei k-vettori. Formula di area per mappe C^1 iniettive (**). Nozione di integrale di k-area, ovvero dell'integrale di una funzione continua su una k-sottovarietà rispetto la misura di Hausdorff k-dimensionale. Particolarizzazione alla nozione di integrale di lunghezza e di area. Integrale di k-forme su k-sottovarietà orientate (con o senza bordo). Teorema di Stokes per k-forme su k-sottovarietà orientate compatte con bordo. Aperti regolari di $\mathbb{R}^n$ e loro normale esterna. Teorema della divergenza e nozione di flusso di un campo vettoriale attraverso una superficie dotata di normale esterna. Particolarizzazione del teorema di Stokes per superfici orientate con bordo in $\mathbb{R}^3$.

(*)=dimostrazione facoltativa
(**)=senza dimostrazione