Prova scritta di Analisi Matematica I del 09.01.14.

Soluzioni.

Esercizio 1. Si consideri la successione definita per ricorrenza

$$\begin{cases} a_{n+1} = a_n + \sin a_n \\ a_0 = 5 \end{cases} .$$

Stabilire se tale successione converge e nel caso determinarne il limite.

Soluzione. La funzione $f(x) := x + \sin(x)$ ha derivata $f'(x) = 1 + \cos(x) \geq 0$ in ogni $x \in \mathbb{R}$. Quindi è continua e crescente in $\mathbb{R}$. Poiché $\pi < 5 < 2\pi$, si ha $\sin(5) < 0$ e $\pi < a_1 := 5 + \sin(5) < 5 := a_0 < 2\pi$. Siccome f è crescente si verifica facilmente per induzione che per ogni naturale n vale $\pi \leq a_{n+1} \leq a_n \leq 2\pi$: infatti questo è vero per $n = 0$ (base dell'induzione), e implica, per la crescenza di f, $f(\pi) \leq f(a_{n+1}) \leq f(a_n) \leq f(2\pi)$, cioé $\pi \leq a_{n+2} \leq a_{n+1} \leq 2\pi$ (passaggio induttivo). La successione decrescente e limitata $(a_n)_n$ converge quindi a un limite l tale che $\pi \leq l \leq 5$ e $l = f(l)$, da cui segue $l = \pi$.

Esercizio 2. Stabilire se l'integrale

$$\int_{\pi}^{3\pi/2} \frac{\cos t}{\sqrt{-\sin^2 t - \sin t}}\, dt$$

è convergente e nel caso calcolarne il valore.

Soluzione. L'integrando è continuo e ha segno costante sull'intervallo di integrazione. Perciò ammette integrale improprio, da valutare, fra 0 e $-\infty$ incluso. Per ogni $\pi < a < b < 3\pi/2$ si ha, con semplici cambi di variabile,

$$\int_a^b \frac{\cos t}{\sqrt{-\sin^2 t - \sin t}}\, dt = \int_a^b \frac{(\sin t)'}{\sqrt{-\sin^2 t - \sin t}}\, dt = \int_{\sin a}^{\sin b} \frac{1}{\sqrt{-s^2 - s}}\, ds =$$

$$\int_{\sin a}^{\sin b} \frac{2}{\sqrt{1 - (1 + 2s)^2}}\, ds = \int_{1+2\sin a}^{1+2\sin b} \frac{du}{\sqrt{1 - u^2}} = \Big[\arcsin(u) \Big]_{1+2\sin a}^{1+2\sin b}.$$

Segue allora che

$$\int_{\pi}^{3\pi/2} \frac{\cos t}{\sqrt{-\sin^2 t - \sin t}}\, dt = \lim_{b\to 3\pi/2} \arcsin(1 + 2\sin b) - \lim_{a\to\pi} \arcsin(1 + 2\sin a) =$$

$$\arcsin(1 + 2\sin(3\pi/2)) - \arcsin(1 + 2\sin\pi) = \arcsin(-1) - \arcsin(1) = -\pi.$$

Esercizio 3. Al variare di α nell'insieme dei numeri reali $\mathbb{R}$ si studi la convergenza semplice e assoluta della serie
$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n-\cos(e^{-n})\right]^{\alpha}.$$

Soluzione. Osserviamo che la quantità $\big(1+1/n^2\big)^n-\cos(e^{-n})$ è sempre positiva perché $\big(1+1/n^2\big)^n>1\geq\cos(e^{-n})$ per ogni naturale n. Inoltre da semplici sviluppi di Taylor si ha $\big(1+1/n^2\big)^n=\exp\Big(n\log\big(1+1/n^2\big)\Big)=\exp\big(1/n+o(1/n)\big)=1+1/n+o(1/n)$ e $\cos(e^{-n})=1+o(e^{-n})=1+o(1/n)$ per $n\to\infty$. Perciò la serie ha termine generico $n^{-\alpha}\big(1+o(1)\big)$ e per confronto asintotico con la serie armonica generalizzata converge a un valore finito esattamente per $\alpha>1$.