Pisa, 30 Giugno 2014

Corsi di Laurea in Ingegneria Elettronica e Telecomunicazioni.

UNIVERSITÀ DI PISA.

Sesta prova scritta di Analisi Matematica I.

(1) **Esporre lo svolgimento degli esercizi in maniera chiara e leggibile.**
(2) **È proibito comunicare con gli altri candidati in qualunque forma.**
(3) **È proibito l'utilizzo di telefoni cellulari.**
(4) **Le parte facoltativa del primo esercizio non occorre per raggiungere il massimo punteggio, ma contribuisce positivamente alla valutazione della prova scritta.**

Esercizio 1. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita come

$$f(t) = (1 + \sin t)e^t \quad \text{per ogni } t \in \mathbb{R}.$$

Si studi l'esistenza e nel caso si determinino i limiti di f sia per $t \to +\infty$, che per $t \to -\infty$. Determinare l'immagine di f, studiare l'esistenza di possibili massimi o minimi globali e nel caso determinarli.

Facoltativo: Si studi la risolubilità dell'equazione $(1 + \sin t)e^t = \lambda$ per $t \in \mathbb{R}$, al variare di λ in $\mathbb{R}$. In particolare, cosa si può dire sul numero di soluzioni?

Soluzione. Abbiamo

$$|f(t)| \leq |1 + \sin t|e^t \leq 2e^t \to 0 \quad \text{per} \quad t \to -\infty\,,$$

pertanto per il teorema del confronto esiste il seguente limite

$$\lim_{t\to-\infty} f(t) = 0\,.$$

Definendo le successioni $t_k = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ e $\tau_k = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$ abbiamo

$$f(t_k) = 2e^{t_k} \quad \text{e} \quad f(\tau_k) = 0$$

per ogni $k \in \mathbb{N}$, pertanto $\lim\limits_{k\to\infty} f(t_k) = +\infty$ e $\lim\limits_{k\to\infty} f(\tau_k) = 0$. Concludiamo che f non ha limite per $t \to +\infty$.

Riguardo all'immagine di f, osserviamo che $1 + \sin t \geq 0$ ed anche $e^t > 0$ per ogni $t \in \mathbb{R}$, pertanto $f(t) \geq 0$ per ogni $t \in \mathbb{R}$, quindi $f(\mathbb{R}) \subset [0, +\infty)$. Inoltre f è continua ed $f(-3\pi/2) = 0$, pertanto l'intervallo $[0, 2e^{t_k}]$ è contenuto in $f(\mathbb{R})$. Per il fatto che $t_k \to +\infty$ e l'arbitrarietà di $k \in \mathbb{N}$, abbiamo $[0, +\infty) \subset f(\mathbb{R})$, quindi $f(\mathbb{R}) = [0, +\infty)$. Pertanto f è illimitata superiormente, quindi non ha massimo globale, mentre i τ_k al variare di $k \in \mathbb{Z}$ sono tutti e soli i punti di minimo globale per f.

Esercizio 2. Consideriamo una restrizione di f dell'Esercizio 1. Precisamente definiamo $g : [-\pi, 2\pi] \to \mathbb{R}$, con $g(t) = (1 + \sin t)e^t$ per $-\pi \le t \le 2\pi$. Determinare tutti i punti di massimo e di minimo, sia locali che globali, per la funzione g, assieme agli intervalli di crescenza e decrescenza.

Suggerimento: Si studi il segno della funzione $\varphi(t) = 1 + \cos t + \sin t$.

Soluzione. Calcolando la derivata di f otteniamo $f'(t) = \varphi(t)e^t$, dove

$$\varphi(t) = 1 + \cos t + \sin t.$$

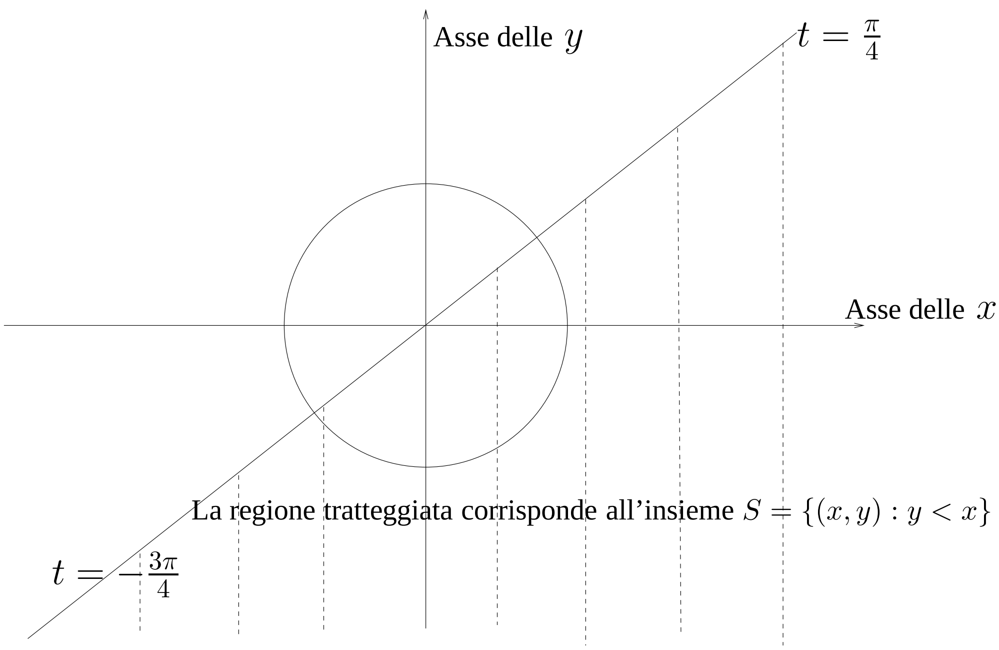
Per studiare il segno di φ abbiamo due modi possibili. Il primo consiste nell'utilizzare la formula di addizione del seno per avere

$$\varphi(t) = 1 + \sqrt{2}\,\sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right),$$

da cui si può studiare del segno di φ. Un altro metodo consiste nello studio di $\varphi'(t) = \cos t - \sin t$, che è positiva se e solo se $\sin t < \cos t$. Abbiamo quindi

$$\begin{aligned}
\varphi'(t) &= \cos t - \sin t > 0 \quad \text{se} \quad t \in (-3\pi/4, \pi/4)\,, \\
\varphi'(t) &= \cos t - \sin t < 0 \quad \text{se} \quad t \in (\pi/4, 5\pi/4)\,, \\
\varphi'(t) &= 0 \quad \text{se} \quad t \in \{-3\pi/4, \pi/4, 5\pi/4\}\,.
\end{aligned}$$

Le precedenti relazioni si possono ottenere dalla definizione geometrica della funzione seno e coseno. Riferendosi ad esempio alla determinazione delle t tali che $\cos t - \sin t > 0$, un altro metodo consiste nell'imporre che la coppia $(\cos t, \sin t)$ stia nella regione del piano $S = \{(x, y) : y < x\}$ come si realizza dalla seguente figura.



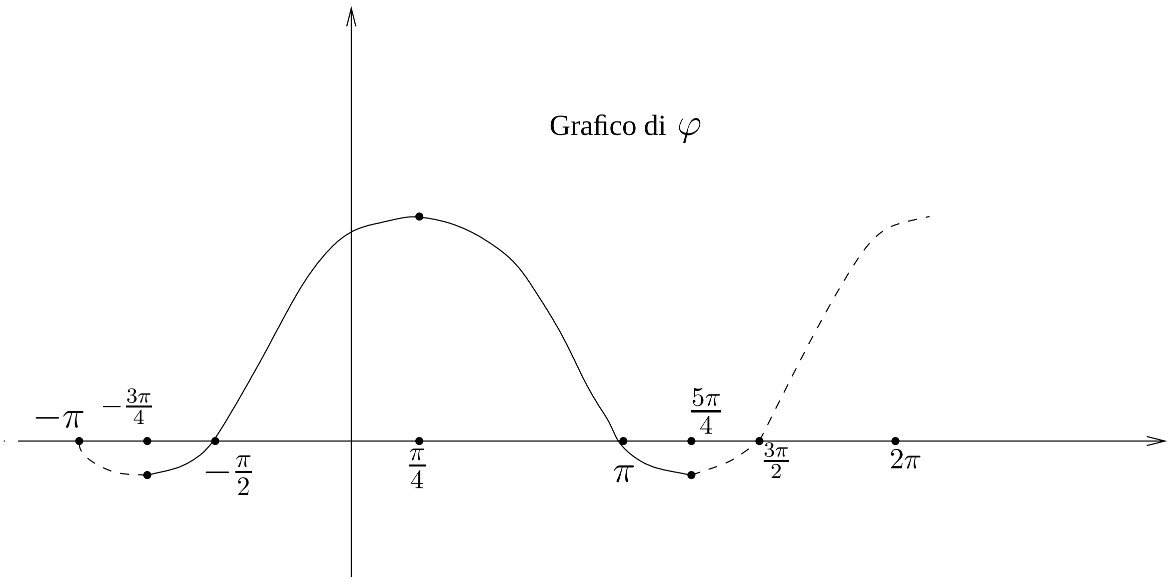
Abbiamo quindi che la funzione φ

(1) cresce strettamente in $[-3\pi/4, \pi/4]$,

(2) decresce strettamente in $[\pi/4, 5\pi/4]$,
(3) ha massimo globale in $t = \pi/4$.

Dalla stretta crescenza di φ otteniamo che $t = -\pi/2$ è l'unico zero di φ in $(-3\pi/4, \pi/4)$. Dalla stretta decrescenza otteniamo che $t = \pi$ è l'unico zero di φ in $(\pi/4, 5\pi/4)$. Quindi possiamo tracciare un grafico qualitativo di φ su $[-3\pi/4, 5\pi/4]$.

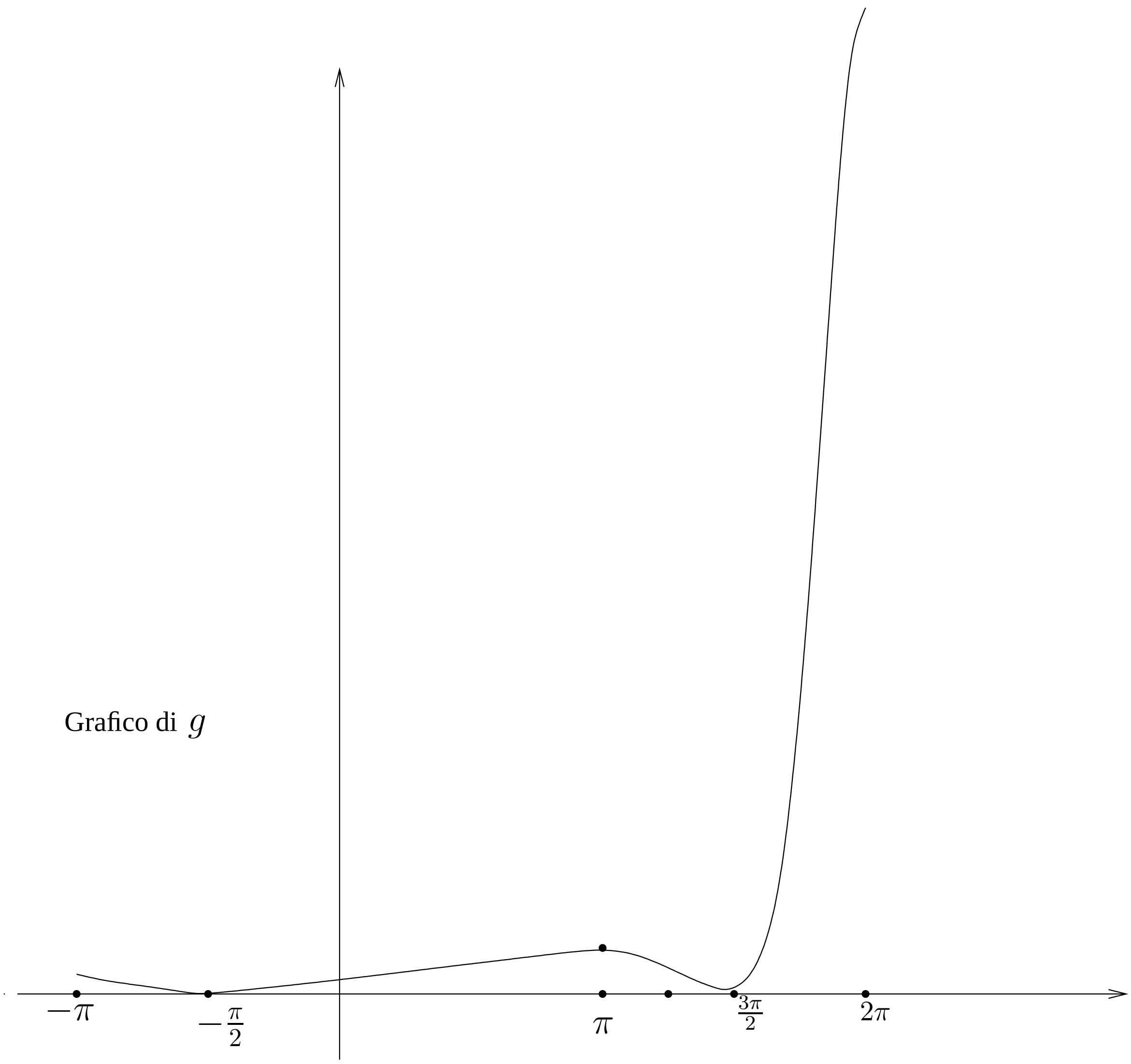
Inoltre φ è periodica di periodo 2π e la lunghezza dell'intervallo $[-3\pi/4, 5\pi/4]$ è 2π, pertanto possiamo estendere il suo grafico per periodicità fino a raggiungere l'intervallo $[-\pi, 2\pi]$. Nel seguente grafico di φ, la parte estesa per periodicità è tratteggiata.



Dal segno della funzione φ deduciamo che g è
(1) strettamente decrescente in $[-\pi, -\pi/2]$,
(2) strettamente crescente in $[-\pi/2, \pi]$,
(3) strettamente decrescente in $[\pi, 3\pi/2]$,
(4) strettamente crescente in $[3\pi/2, 2\pi]$.

Deduciamo quindi che $g(-\pi/2) = 0$ è un minimo locale di g, $g(\pi) = e^{\pi}$ è un massimo locale di g e $g(3\pi/2) = 0$ è un minimo locale di g. Agli estremi abbiamo $g(-\pi) = e^{-\pi}$ e $g(2\pi) = e^{2\pi}$. Concludiamo quindi che $-\pi/2$ e $3\pi/2$ sono punti di minimo globale, dove g si annulla, π è un punto di massimo locale e 2π è il punto di massimo globale per g.

Il grafico qualitativo di g rappresentato nella pagina seguente riassume tutte le informazioni sui massimi e minimi, locali e globali.



Esercizio 3. Stabilire se l'integrale improprio

$$\int_0^{+\infty} x\ \cos(e^{\alpha x})\, dx$$

converge al variare di α tra i numeri reali positivi, motivandone la risposta.

Soluzione. Con il cambio di variabile $y = e^{\alpha x}$, l'esistenza del limite di

$$\int_0^{b} x\ \cos(e^{\alpha x})\, dx$$

per $b \to +\infty$, avendo $x = \frac{1}{\alpha} \log y$, è equivalente all'esistenza del limite di

$$\frac{1}{\alpha^2} \int_1^{\beta} \frac{\log y}{y}\ \cos y\, dy$$

per $\beta \to +\infty$, poichè $\beta = e^{\alpha b} \to +\infty$ per $b \to +\infty$. Quindi l'integrale improprio dato converge se e solo se converge il seguente integrale improprio

$$(1) \qquad \int_1^{+\infty} \frac{\log y}{y} \cos y \, dy\,.$$

Integrando per parti, per ogni $\beta > 1$ abbiamo

$$\begin{aligned} \int_1^{\beta} \frac{\log y}{y} (\sin y)' \, dy &= \frac{\sin \beta \, \log \beta}{\beta} - \int_1^{\beta} (\sin y) \frac{(1 - \log y)}{y^2} \, dy \\ &= o(1) - \int_1^{\beta} (\sin y) \frac{(1 - \log y)}{y^2} \, dy \end{aligned}$$

per $\beta \to +\infty$. Pertanto, l'integrabilità della funzione $f(y) = (\sin y) \frac{(1-\log y)}{y^2}$ in $(1, +\infty)$ implica che l'integrale (1) converge e quindi anche l'integrale dato converge per ogni $\alpha > 0$. Proviamo quindi tale integrabilità di f su $(1, +\infty)$. Studiamo la convergenza assoluta, considerando per $\beta > 1$ le stime

$$\int_1^{\beta} \left| (\sin y) \frac{(1 - \log y)}{y^2} \right| dy \le \int_1^{\beta} \frac{1}{y^2} \, dy + \int_1^{\beta} \frac{|\log y|}{y^2} \, dy\,.$$

Il primo integrale della somma è convergente. Il secondo integrale converge in quanto

$$\frac{|\log y|}{y^2} = O(y^{-3/2}) \quad \text{ per } \quad y \to +\infty.$$

Concludiamo quindi che l'integrale dato converge per ogni $\alpha > 0$.

Risoluzione della parte facoltativa dell'Esercizio 1. Poichè $f(\mathbb{R}) = [0, +\infty)$, l'equazione $(1+\sin t)e^t = \lambda$ ammette soluzione se e solo se $\lambda \ge 0$. Sia ora $\lambda \ge 0$ e si considerino le successioni $t_k = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ e $\tau_k = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$ con k intero non negativo. Si osservi che $\tau_k < t_{k+1}$ e che per la continuità di f abbiamo

$$[f(\tau_k), f(t_{k+1})] = [0, 2e^{t_{k+1}}] \subset f([\tau_k, t_{k+1}]).$$

Poichè $f(t_{k+1}) = 2e^{t_{k+1}} \to +\infty$ per $k \to \infty$, esiste $k_0 \in \mathbb{N}$, dipendente solo da λ, tale che per ogni $k \ge k_0$ si ha $\lambda < f(t_{k+1})$. Abbiamo quindi

$$\lambda \in [0, f(t_{k+1})] \subset f([\tau_k, t_{k+1}])$$

per ogni $k \ge k_0$. Quindi esiste $\mu_k \in [\tau_k, t_{k+1}]$ tale che $\lambda = f(\mu_k)$, ovvero

$$(1 + \sin \mu_k)e^{\mu_k} = \lambda\,.$$

Poichè $t_{k+1} < \tau_{k+1}$, gli intervalli $[\tau_k, t_{k+1}]$ sono disgiunti, quindi tutti i μ_k sono distinti. Ne segue che abbiamo infinite soluzioni.

Il seguente grafico qualitativo chiarisce intuitivamente l'idea per cui possiamo aspettarci infinite soluzioni.

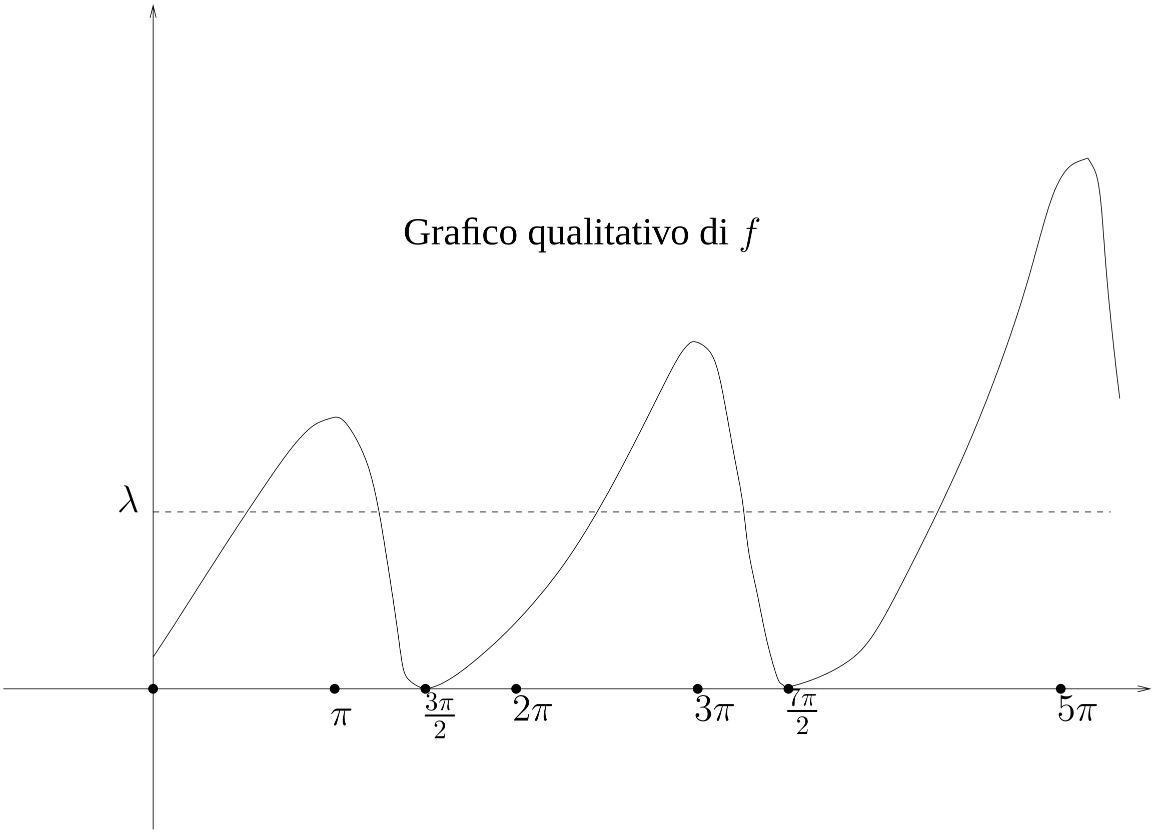


Grafico qualitativo di f
λ
π
$\frac{3\pi}{2}$
2π
3π
$\frac{7\pi}{2}$
5π