Pisa, 15 Settembre 2014

Corsi di Laurea in Ingegneria Elettronica e Telecomunicazioni.

UNIVERSITÀ DI PISA.

Ottava prova scritta di Analisi Matematica I.

(1) **Esporre lo svolgimento degli esercizi in maniera chiara e leggibile.**
(2) **È proibito comunicare con gli altri candidati in qualunque forma.**
(3) **È proibito l'utilizzo di telefoni cellulari.**

Esercizio 1. Si consideri $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, definita per ogni $x > 0$ come

$$f(x) = x^{(1-\sin x)}.$$

(1) Provare che f è ben definita nel suo dominio di definizione.
(2) Stabilire se f è monotona in $(0, +\infty)$.
(3) Stabilire l'esistenza ed in tal caso determinare i limiti di f sia per $x \to +\infty$, che per $x \to 0^+$.
(4) Stabilire se f è limitata in $(0, +\infty)$.

Soluzione. (1) Poichè la base x è positiva, la potenza x^b è ben definita per ogni $b \geq 0$. Essendo $1 - \sin x \geq 0$ per ogni x reale, ne viene che $x^{1-\sin x}$ è ben definita per ogni $x > 0$.

(2) Definendo $x_k = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ e $y_k = \pi + k\pi$ per ogni $k \in \mathbb{N}$ abbiamo

$$f(x_k) = 1 \quad \text{e} \quad f(y_k) = y_k = (1 + k)\pi.$$

In particolare, abbiamo $1 = f\left(\frac{\pi}{2}\right) < f(2\pi) > f\left(\frac{5}{2}\pi\right) = 1$, poichè $f(2\pi) = 2\pi$. Ne segue che f non può essere monotona. **Un altro metodo** consiste nel calcolare

$$f'(x) = \left[-\cos x \log x + \frac{(1 - \sin x)}{x} \right] x^{(1-\sin x)},$$

osservando che ad esempio $f'(\pi) = (1 + \pi \log \pi) > 0$ e $f'(2\pi) = \big(1 - 2\pi \log(2\pi)\big) < 0$.

(3) Dalle precedenti definizioni di x_k e y_k abbiamo i limiti

$$\lim_{k\to+\infty} f(x_k) = 1 \quad \text{e} \quad \lim_{k\to+\infty} f(y_k) = +\infty,$$

dove $x_k \to +\infty$ e $y_k \to +\infty$, quindi f non ha limite per $x \to +\infty$. Abbiamo inoltre dal teorema di cambiamento di variabile nei limiti

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} e^{(1-\sin x)\log x} = \lim_{y\to-\infty} e^y = 0$$

in quanto $y = (1 - \sin x) \log x \to -\infty$ per $x \to 0^+$.

(4) Il limite $\lim_{k\to+\infty} f(y_k) = +\infty$ prova che f non è limitata superiormente.

Esercizio 2. Studiare la convergenza dell'integrale improprio

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3} \sin\left(\frac{1}{x}\right) dx$$

ed in caso di convergenza se ne calcoli il valore.

Soluzione. Poniamo il cambiamento di variabile $x = \frac{1}{y}$, quindi per ogni $b > 1$ abbiamo

$$\int_1^b \frac{1}{x^3} \sin\left(\frac{1}{x}\right) dx = -\int_1^{1/b} y \sin y \, dy = \int_{1/b}^1 y \sin y \, dy \longrightarrow \int_0^1 y \sin y \, dy$$

per $b \to +\infty$. Tale limite è l'integrale di una funzione continua su un intervallo chiuso e limitato, quindi l'integrale dato è convergente. Inoltre integrando per parti si ha

$$\int_0^1 y \sin y \, dy = \Big[-y \cos y \Big]_{y=0}^{y=1} + \int_0^1 \cos y \, dy = -\cos(1) + \sin(1).$$

Ne segue che

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3} \sin\left(\frac{1}{x}\right) dx = \sin(1) - \cos(1)\,.$$

Esercizio 3. Dato $\alpha > 0$ si consideri la serie numerica

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} + k\pi + \frac{1}{k^\alpha}\right)}{k^\alpha}\,.$$

Si studi la convergenza semplice e assoluta di tale serie al variare di $\alpha > 0$.

Soluzione. Osserviamo che

$$\left|\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} + k\pi + \frac{1}{k^\alpha}\right)}{k^\alpha}\right| \leq \frac{1}{k^\alpha}$$

pertanto la serie converge assolutamente per ogni $\alpha > 1$ in virtù del teorema del confronto per serie. Dalla formula trigonometrica di addizione abbiamo

$$\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} + k\pi + \frac{1}{k^\alpha}\right)}{k^\alpha} = \frac{(-1)^k \cos\left(\frac{1}{k^\alpha}\right)}{k^\alpha}.$$

Poichè $\cos\left(\frac{1}{k^\alpha}\right) \to 1$ per $k \to +\infty$, abbiamo in particolare che

$$\left|\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} + k\pi + \frac{1}{k^\alpha}\right)}{k^\alpha}\right| = \left|\frac{\cos\left(\frac{1}{k^\alpha}\right)}{k^\alpha}\right| \geq \frac{1}{2k^\alpha}$$

per ogni $k \geq k_0$, con k_0 sufficientemente grande. Dal teorema del confronto per serie segue che la serie data non converge assolutamente per $0 < \alpha \leq 1$. Poichè la derivata della funzione $x \to x \cos x$ nell'origine è 1, tale funzione è crescente in un intorno dell'origine. Ciò prova che la successione

$$a_k = \frac{1}{k^\alpha} \cos\left(\frac{1}{k^\alpha}\right)$$

decresce a zero per k sufficientemente grande e quindi dal criterio di Leibniz la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} + k\pi + \frac{1}{k^\alpha}\right)}{k^\alpha} = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k a_k$$

converge semplicemente per ogni $\alpha > 0$. Pertanto la serie data converge semplicemente, ma non assolutamente, per $0 < \alpha \leq 1$.