Complementi di Analisi Matematica. Foglio di esercizi n.8
30/3/2017

`Esercizi su massimi e minimi vincolati`

1. Determinare il paralelepipedo di volume massimo con vertici inscritti nell'ellissoide
$$E = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1\right\}$$
al variare di $a, b, c > 0$.

2. Determinare il massimo ed il minimo di $\varphi(\theta) = \cos\theta + 2\sin^3\theta$ nell'intervallo $[0, 2\pi]$. *Suggerimento.* Si consideri la funzione $f(x, y) = x + 2y^3$ sulla circonferenza.

3. Stabilire l'esistenza di punti di massimo e minimo della funzione
$$f(x, y) = \frac{y}{x^2}$$
sull'insieme $D = \{(x, y) : x \neq 0,\ x^2 + (y - 2)^2 \leq 1\}$ e nel caso determinarli.

4. Sia $C \subset \mathbb{R}^3$ l'insieme dato dal seguente sistema di equazioni
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + (z+1)^4 = 1 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \end{cases} .$$
Stabilire se C è non vuoto ed in tal caso stabilire se si tratta di una 1-superficie compatta. Data $f(x, y, z) = x + 2y$, determinarne massimo e minimo su C.

5. Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aperto, $f \in C^1(\Omega)$, $w \in S \cap \Omega$ un punto k-regolare di $S \subset \mathbb{R}^n$, $1 \leq k < n$ e sia $g = (g_1, \ldots, g_{n-k}) \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^{n-k})$ una funzione definente S intorno a w. Provare che w è un punto critico di f se e solo se il rango della seguente matrice non è massimo
$$\begin{pmatrix} \nabla f(w) \\ \nabla g_1(w) \\ \vdots \\ \nabla g_{n-k}(w) \end{pmatrix} .$$

6. Definiamo $f(x, y) = xye^{x^2+2y^2}$ sull'insieme
$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 2\right\} .$$
Determinare l'immagine $f(D)$.

7. Determinare il massimo ed il minimo di $f : D \to \mathbb{R}$, ove $f(x, y, z) = xy + yz$ e
$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + 2z^2 \leq 1,\ z \geq 0\} .$$

8. Si consideri $f : D \to \mathbb{R}$, ove $f(x,y) = (y^2 - x)e^x$ e $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x + y^2 \leq 0\}$.
   (a) Provare che esiste e calcolare $\lim_{(x,y)\to\infty} f(x,y)$.
   (b) Determinare $f(D)$.

9. Si consideri l'insieme $C \subset \mathbb{R}^3$ dei punti (x,y,z) che risolvono il sistema seguente

$$\begin{cases} (x-y)^2 + z^2 = 3 \\ 2x^2 + y^2 - z^2 = 1 \end{cases} .$$

   (a) Provare che $C \neq \emptyset$ e stabilire se C è una varietà.
   (b) Determinare $f(C)$, dove $f(x,y,z) = z$.

   Sugg. Non è necessario lo studio della connessione di C, ma si possono considerare i valori di z compresi tra il massimo ed il minimo tali che esistano soluzioni del sistema. Osserviamo infine che tale metodo consentirebbe di rispondere alla seconda domanda senza l'utilizzo dei moltiplicatori di Lagrange, data la particolare semplicità della f.

10. Consideriamo l'insieme $C \subset \mathbb{R}^3$ dei punti che soddisfano il sistema

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \end{cases} .$$

   (a) Provare che C è una curva regolare compatta.
   (b) Determinare i punti critici di f su C ed i corrispettivi moltiplicatori di Lagrange.
   (c) Determinare il massimo ed il minimo di $f(x,y,z) = xy$ su C.

11. Consideriamo $f(x,y,z,t) = xt + y^2$ e la 3-superficie

$$\Sigma = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : x^2 + y^2 + z^4 + t^2 = 9\right\} .$$

   Provare che Σ è una 3-superficie in $\mathbb{R}^4$ e determinare massimo e minimo di f su Σ.

12. Consideriamo $f(x,y,z) = x^2 + y^2$ ed

$$E = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^{10} + y^{10} + z^{10} \leq 1\right\} .$$

   Determinare $\max_E f$ e $\min_E f$.

13. Determinare massimo e minimo di

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin[\sqrt{(x-1)^2 + y^2}]}{\sqrt{(x-1)^2 + y^2}} & \text{se } (x-1)^2 + y^2 > 0 \\ 1 & \text{se } x = 1 \text{ e } y = 0 \end{cases}$$

   sul vincolo $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

   Suggerimento: Considerare la funzione $\varphi(t) = \frac{1}{t}\sin t$ per $t \neq 0$ e $\varphi(0) = 1$ e osservare che è decrescente in $[0,2]$. Osservare infine che la funzione "distanza dal punto $(1,0)$" $(x,y) \to \sqrt{(x-1)^2 + y^2}$ ha immagine $[0,2]$ in $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$.