

Analisi II. Foglio di esercizi n.3
8/11/2017

Esercizi su integrali curvilinei e potenziali

1. Provare che $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (t, |t|)$, è C^1 a tratti su \mathbb{R} . Per ogni $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$ calcolarne la lunghezza della restrizione $\gamma|_{[a,b]}$.
2. Si consideri la curva $\gamma(t) = (2 \cos t, \sin t)$ su $[0, 2\pi]$ e si calcoli

$$\int_{\gamma} (1 + 3y^2)^{-1/2} ds.$$

3. Consideriamo $\Gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$, ove $\Gamma(t) = (e^t, t^2)$ per ogni $t \in [0, 1]$. Scrivere il valore di $\int_{\Gamma} \sqrt{4y + x^2} ds$.

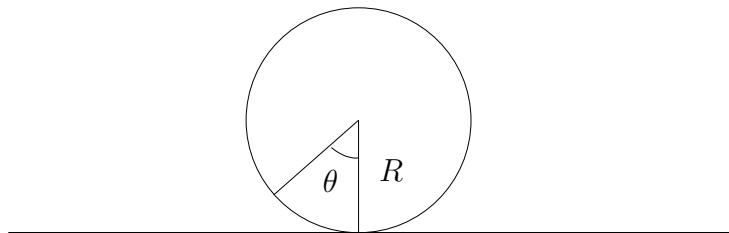
4. Dati $L > 0$ e $\gamma(t) = (t, 1 - t)$ su $[0, L]$, calcolare

$$\int_{\gamma} (e^{|y|} - x) ds.$$

5. Si consideri la “cicloide”, ovvero la curva ottenuta da un punto fissato ad una ruota che rotola su una retta senza slittamenti. Verificare che il punto ha coordinate

$$\gamma(\theta) = (R\theta - R \sin \theta, R - R \cos \theta).$$

Calcolare la lunghezza del tratto percorso dal punto sulla ruota, quando ha compiuto un intero giro.



6. Data $\gamma : [-2, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\gamma(t) = (t^2, t^2|1+t|, \frac{t^3}{3})$. Provare che γ è C^1 a tratti.
7. Calcolare la lunghezza di $\gamma : [\frac{1}{\sqrt{15}} - \frac{1}{4}, \frac{2}{\sqrt{15}} - \frac{1}{4}] \rightarrow \mathbb{R}^3$, definita come

$$\gamma(t) = \left(\frac{t^2}{2}, \frac{2}{\sqrt{15}}t^2 + \sqrt{\frac{5}{3}}t^3, \frac{t^3}{3} \right).$$

Sugg. Usare la formula $\int_0^t \sqrt{1+x^2} dx = \frac{1}{2} (\log(t + \sqrt{1+t^2}) + t\sqrt{1+t^2})$.

8. Calcolare la lunghezza di $\gamma : [-2, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\gamma(t) = (t^2, t^3, t^3)$.

9. Data la 1-forma differenziale $\eta_0 = -\frac{y}{x^2 + y^2}dx + \frac{x}{x^2 + y^2}dy$ e consideriamo

$$\gamma(t) = (t^2 + \log(e^t + t^8)) (\cos t, \sin t)$$

definita su $(0, 2\pi)$. Calcolare, se esiste,

$$\int_{\gamma} \eta_0 := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\gamma|_{[\varepsilon, 2\pi - \varepsilon]}} \eta_0$$

Sugg. Considerare la funzione arcocoseno.

10. Si consideri la 1-forma differenziale

$$\omega = xdx + e^z dy + ye^z dz$$

e la curva $\gamma(t) = (e^{e^{\cos t - \sin^2 t}}, \log(1 + e^{-t^2 + \cos t}), \frac{1}{1+t^4})$ sull'intervallo $[0, \pi]$.
Calcolare $\int_{\gamma} \omega$.

11. Data $\gamma(t) = (t, 1 - t, t^2)$ su $[0, \sqrt{2}]$, calcolare $\int_{\gamma} (|x + y| + \sqrt{|z|}) ds$.

Sugg. Usare la formula $\int_0^t \sqrt{1 + x^2} dx = \frac{1}{2} (\log(t + \sqrt{1 + t^2}) + t\sqrt{1 + t^2})$.

12. Si consideri la curva $\gamma(t) = (\log(1 + e^t), 1, \cos(\pi t))$ su $[0, 1]$ e si calcoli $\int_{\gamma} F$, ove $F = \left(\frac{z}{y}, -\frac{xz}{y^2}, \frac{x}{y}\right)$.

13. Si consideri la seguente curva $\gamma(t) = (-t^3, 2e^{\sin(\pi t)}, \sin(\pi t))$ su $[0, 1]$. Si calcoli l'integrale $\int_{\Gamma} F$, ove $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ è definita come

$$F = \left(\frac{x^3}{1 + x^4 + y^4 + z^4}, \frac{y^3}{1 + x^4 + y^4 + z^4}, \frac{z^3}{1 + x^4 + y^4 + z^4} \right).$$

14. Stabilire se esistono e nel caso determinare gli α reali tali che il campo $F : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}^2$, ove

$$F(x, y) = \left(\frac{\alpha y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right),$$

sia conservativo in $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x, y > 0\}$. Per tali α , nel caso esistano, calcolare un potenziale di F su Ω .

15. Stabilire se il campo vettoriale

$$F(x, y) = \left(-\frac{y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right)$$

è conservativo sull'aperto $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$, dandone una breve argomentazione. Data la curva $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$,

$$\gamma(t) = ((1 - t) \cos(\pi - t\pi), 1 + (1 - t) \sin(\pi - t\pi)),$$

scrivere il valore dell'integrale $\int_{\gamma} F$.

16. Scrivere l'unica funzione potenziale $V : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ del campo

$$F(x, y) = \left(\frac{\cos(x + y)}{2 + \sin(x + y)}, \frac{\cos(x + y)}{2 + \sin(x + y)} \right)$$

tale che $V(0, 0) = \log 4$.

17. Sia data la 1-forma differenziale $\omega = \frac{dx}{(1 + y)(1 + x)^2} + \frac{dy}{(1 + x)(1 + y)^2}$.
Definendo la curva $\gamma : [0, \sqrt{\pi}] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (e^{\sin(t^2)}, e^{\cos(t^2)})$, si scriva il valore di $\int_{\gamma} \omega$.

18. Consideriamo $F(x, y) = (x + y, x - y)$ e $\gamma(t) = (t, e^t)$ su $[0, 1]$.

(a) Stabilire se F è conservativo in \mathbb{R}^2 .

(b) Calcolare $\int_{\gamma} F$.

19. Consideriamo la forma differenziale

$$\omega = (2xyz + y^2z - y + 2z)dx + (x^2z + 2xyz - x - 4)dy + (x^2y + xy^2 + 2x + 1)dz$$

e la curva $\gamma(t) = (\sin t, t, e^t)$ su $[0, \pi]$.

(a) Stabilire se ω è esatta in \mathbb{R}^3 .

(b) Calcolare $\int_{\gamma} \omega$.

20. Sia data la 1-forma differenziale $\omega_{\alpha} = xydx + dy + \frac{\alpha x^2}{2}dy$.

(a) Stabilire per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ la 1-forma differenziale ω_{α} è esatta in \mathbb{R}^2 .

(b) Per tali $\alpha \in \mathbb{R}$ determinarne una primitiva f_{α} .

21. Al variare di $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, sia data la 1-forma differenziale

$$\omega_{\alpha, \beta} = y(x - z)dx + (\alpha x^2 + \beta z^2 - xz)dy + y(z - x)dz.$$

- (a) Determinare per quali $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ la 1-forma differenziale $\omega_{\alpha, \beta}$ è esatta in \mathbb{R}^3 .
- (b) Per tali α, β determinarne una primitiva di $\omega_{\alpha, \beta}$ e calcolare $\int_{\gamma} \omega_{\alpha, \beta}$, dove abbiamo definito $\gamma(t) = (t, \operatorname{tg} t, \sin t)$ su $[0, \pi/4]$

22. Consideriamo $F : \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}^3$,

$$F(x, y, z) = \left(\frac{y^2 + z^2 - x^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^2}, -\frac{2xy}{(x^2 + y^2 + z^2)^2}, -\frac{2xz}{(x^2 + y^2 + z^2)^2} \right).$$

Stabilire se F è conservativo in $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ ed in tal caso determinarne un potenziale.

23. Determinare il più grande dominio della 1-forma differenziale

$$\omega = -\frac{x}{x^2 - y^2 - z^2} dx + \frac{y}{x^2 - y^2 - z^2} dy + \frac{z}{x^2 - y^2 - z^2} dz$$

e stabilire se ha una primitiva in tale dominio.

24. Determinare tutti i valori $p \in \mathbb{R}$ tali che il campo vettoriale

$$F = \left(\frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2 + t^2)^p}, \frac{y}{(x^2 + y^2 + z^2 + t^2)^p}, \frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2 + t^2)^p}, \frac{t}{(x^2 + y^2 + z^2 + t^2)^p} \right)$$

sia conservativo in $\mathbb{R}^4 \setminus \{(0, 0, 0, 0)\}$ e per essi determinarne un potenziale.

25. (**Avanzato**) Consideriamo l'aperto $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0, y \neq 0\}$ ed il campo $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ definito come segue

$$F(x, y) = \left(\frac{\sigma_y |y|^q}{(x^2 + y^2)^p}, \frac{\sigma_x |x|^q}{(x^2 + y^2)^p} \right),$$

dove $p, q \in \mathbb{R}$. La funzione segno soddisfa $\sigma_t = 1$ se $t > 0$, $\sigma_0 = 0$ e $\sigma_t = -1$ se $t < 0$. Determinare per quali coppie (p, q) il campo F è conservativo, ed in tal caso calcolarne la funzione potenziale.