Analisi II. Foglio di esercizi n.4
13/11/2017
(Aggiornamento del 1/12/2017)

`Esercizi sull'integrazione di più variabili`

1. Provare che le funzioni $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$, definita come

$$f(x) = \begin{cases} -\infty & \text{se } \max_{1\le i\le n} |x_i| \le 1 \\ e^{x_1} & \text{se } \max_{1\le i\le n} |x_i| > 1 \end{cases}$$

e $g : \mathbb{R}^2 \to \overline{\mathbb{R}}$, definita come

$$g(x,y) = \begin{cases} +\infty & \text{se } x = 0 \\ \frac{1}{x}\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) & \text{se } x \neq 0 \end{cases}$$

sono entrambe misurabili.

2. Definiamo $Z \subset (0,+\infty)$ trascurabile ed $f : [0,+\infty) \to \overline{\mathbb{R}}$ come segue

$$f(x) = \begin{cases} \log x & \text{se } x \in (0,+\infty) \setminus Z \\ -\infty & \text{se } x = 0 \\ +\infty & \text{se } x \in Z \end{cases} .$$

Stabilire se f è misurabile, argomentandone la risposta.

3. Provare che $E \subset \mathbb{R}^n$ è misurabile se e solo se la sua funzione caratteristica $\mathbf{1}_E$ è misurabile.

4. Provare che $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ è integrabile su E se tale insieme è trascurabile ed in tal caso

$$\int_E f(x)dx = 0.$$

5. Provare che se $E \subset \mathbb{R}^n$ è misurabile e

$$\int_E |x|dx < +\infty$$

allora E ha misura finita e ammette un baricentro.

6. Stabilire se il seguente sottoinsieme

$$\Omega = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < y < e-1, 0 < x + xy < 1\Big\}$$

ha area finita ed in tal caso calcolarla.

7. Siano $0 \le \alpha < \beta \le 2\pi$, e consideriamo $\rho : [\alpha, \beta] \to [0, +\infty)$ continua. Definiamo l'insieme

$$E = \{(r\cos\theta, r\sin\theta) : \alpha \le \theta \le \beta,\ 0 < r < \rho(\theta)\}.$$

Usando le coordinate polari, provare che vale la formula

$$\mathbf{m}_2(E) = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \rho(\theta)^2 d\theta.$$

8. Dati $r > 0$ e $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, calcolare l'area del disco

$$\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < r^2\right\}$$

utilizzando le coordinate polari. Fissato $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$, si calcoli il volume del solido sferico

$$\left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 < r^2\right\}$$

usando le coordinate sferiche.

9. Per $r > 0$ definiamo $B(0, r) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 < r^2\}$ e

$$\Phi(r) = \int_{B(0,r)} (x^2 + y^2 + z^2)^2\, dxdydz\,.$$

Calcolare $\Phi(r)$.

10. Calcolare il volume dell'interesezione di due cilindri

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \le r^2,\ x^2 + z^2 \le r^2\}.$$

11. Considerato l'insieme

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : -2 + 2x^2 + 2y^2 < z < 2 - 2x^2 - 2y^2\}.$$

Si tracci il grafico di tale insieme e se ne calcoli il volume.

12. Considerato l'insieme $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0,\ y > 0,\ 1 < x + y < 2\}$, si tracci il grafico di tale insieme. Stabilire se esiste, ed in tal caso scrivere il valore dell'integrale $\displaystyle\int_E \frac{1}{x+y}\, dxdy$.

13. Definito l'aperto $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + z^2 - 4 < 0 \text{ e } x^2 + z^2 - 1 < y < 5\}$, se ne tracci un grafico qualitativo e si scriva il valore del suo volume.

14. Scrivere il valore del volume dell'insieme

$$O = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + (z - 1)^2 < 4 \text{ e } z > 0\}.$$

15. Consideriamo $E_\lambda = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x,y,z \geq 0,\ x+y+z \leq \lambda\right\}$. Studiare l'integrabilità di z^α su E al variare di $\alpha > 0$ e $\lambda > 0$. In tal caso calcolare

$$\int_{E_\lambda} z^\alpha \, dxdydz.$$

16. Dimostrare l'integrabilità di $(x,y) \to \sin(x+y)$ su $E = (0,\pi/2) \times (0,\pi)$ e calcolare $\int_E \sin(x+y)\, dxdy$.

17. Stabilire se l'insieme $E = \{(x,y,z) : x^2 \leq z \leq x - y^2\}$ ha misura finita ed in tal caso calcolarla.

18. Siano $\alpha > 0$ ed $E_\alpha = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > 1,\ -\frac{1}{y^\alpha} \leq x < 0\}$. Provare che E_α è misurabile e calcolarne la misura per ogni $\alpha > 0$.

19. Si provi che l'insieme $D \subset \mathbb{R}^2$ costituito dai punti $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tali che

$$-1 \leq xy \leq 1, \quad x^2 + y^2 \leq 4 \quad \text{e} \quad \min\{x-y, x+y\} \geq 0,$$

è misurabile. Si studi l'integrabilità di $f(x,y) = (x^2 - y^2)\cos(xy)$ su D ed in caso di integrabilità si calcoli $\int_D f(x,y)\, dxdy$.

20. Si consideri $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -2 \leq x - y \leq 1 \leq y \leq 2\right\}$ e si calcoli $\int_D (x^2 - y^2)\, dxdy$.

21. Stabilire l'integrabilità della funzione

$$f(x,y,z) = z(3x^2 - 2y^2)\frac{e^{x^2+y^2}}{x^2+y^2}$$

sul dominio $D = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z \leq 2,\ z^2 \leq x^2 + y^2\right\}$ ed in tal caso calcolarne l'integrale.

22. Provare che il seguente insieme

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1,\, 0 < y < x/2\}$$

è misurabile e calcolare

$$\int_A \frac{1}{x}\sqrt{\frac{x^2y^2 + y^4}{1 - x^2 - y^2}}\, dxdy \in [0, +\infty],$$

finito o infinito.

23. Al variare di $\alpha > 0$ stabilire se la misura dell'insieme

$$E_\alpha = \Big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z \geq 0,\ y \geq 1,\ y^{2\alpha}(z+x^2) \leq 1\Big\}$$

è finita ed in tal caso calcolarla.

Suggerimento: integrare prima rispetto ad $y \in [1, +\infty)$.

24. Calcolare l'integrale

$$\int_Q (x^3 + x^2 y - xy^2 - y^3)(x+y)\sin(2z)\, dx\, dy\, dz$$

ove si abbiamo definito $Q \subset \mathbb{R}^3$ come l'insieme dei punti (x,y,z) tali che

$$0 < z < \frac{\pi}{2}, \quad 0 < x + y < \min\left\{\frac{1}{\cos z}, \frac{1}{\sin z}\right\} \quad \text{e} \quad 0 < x - y < 1.$$

Suggerimento: considerare il cambio di variabile $u = (x+y)$ e $v = (x-y)$.

25. Si provi l'integrabilità di

$$f(x,y) = \frac{xy + y^2}{2 + x + y}$$

sull'insieme $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq y \leq 1,\ x + y \geq -1\}$. Utilizzando il cambio di coordinate

$$\begin{cases} u = x + y \\ v = y \end{cases}$$

si calcoli $\displaystyle\int_D f$.

26. Si considerino la funzione

$$f_\alpha(x,y,z,t) = \frac{(z^2 - x^2 - y^2)^\alpha}{t^2} \log\left(\frac{1}{z}\right)$$

ed $A = \Big\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid \sqrt{x^2+y^2} < z < 1,\ t^2 + x^2 + y^2 > z^2,\ t > 0\Big\}$. Al variare di α in $\mathbb{R}$ si calcoli $\displaystyle\int_A f_\alpha \in [0, +\infty]$.

27. **(Avanzato)** Consideriamo l'insieme

$$A = \Big\{(x,y,u,v,z) \in \mathbb{R}^5 \mid x^2 + y^2 \leq u^2 + v^2 + z^2 \leq (x^2+y^2)^{1/3}\Big\}.$$

Si determinino gli α reali tali che

$$f_\alpha(x,y,u,v,z) = z\left(z^2 + u^2 + v^2\right)^\alpha$$

sia integrabile in A e per tali valori si calcoli $\displaystyle\int_A f_\alpha$.

28. **(Svolto)** Si consideri l'insieme

$$A = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2+y^2+(z-1)^2 \leq 1 \ \text{ e } \ y^2+z^2 \leq 1\right\}$$

e la funzione $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ definita come segue

$$f(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{2z-z^2-y^2}}.$$

Si osservi che f è ben definita su A e si calcoli $\int_A f(x,y,z)dxdydz$.

Soluzione. Osserviamo che se $(x,y,z) \in A$, allora la prima disequazione implica $z \geq 0$, mentre la seconda implica $|z| \leq 1$, concludiamo quindi che deve essere $0 \leq z \leq 1$. Inoltre per tali punti abbiamo

$$0 \leq x^2 \leq 1-(z-1)^2-y^2 = 2z-z^2-y^2,$$

pertanto f è ben definita. Per il Teorema di Tonelli abbiamo

$$\int_A f(x,y,z)dxdydz = \int_0^1 \left(\int_{A_z} f(x,y,z)dxdy\right) dz.$$

Fissato $z \in [0,1]$, si ha

$$y^2 \leq x^2+y^2 \leq 2z-z^2 \quad \text{e} \quad y^2 \leq 1-z^2,$$

pertanto definendo $\varphi(z) = \min\{1-z^2, 2z-z^2\}$ ne risulta che

$$|y| \leq \sqrt{\varphi(z)}.$$

Concludiamo pertanto che

$$\begin{aligned}\int_A f &= \int_0^1 \left(\int_{-\sqrt{\varphi(z)}}^{\sqrt{\varphi(z)}} \left(\int_{(A_z)_y} f(x,y,z)dx\right) dy\right) dz \\ &= \int_0^1 \left(\int_{-\sqrt{\varphi(z)}}^{\sqrt{\varphi(z)}} \left(\int_{\left\{x:|x|\leq\sqrt{2z-z^2-y^2}\right\}} f(x,y,z)dx\right) dy\right) dz\end{aligned}$$

e abbiamo

$$\int_{\left\{x:|x|\leq\sqrt{2z-z^2-y^2}\right\}} \frac{1}{\sqrt{2z-z^2-y^2}}dx = 2.$$

Ne segue che

$$\begin{aligned}\int_A f &= 4\int_0^1 \min\{\sqrt{1-z^2}, \sqrt{2z-z^2}\}dz \\ &= 4\int_0^{1/2} \sqrt{2z-z^2}\, dz + 4\int_{1/2}^1 \sqrt{1-z^2}\, dz.\end{aligned}$$

Consideriamo la traslazione $z = x + 1$, ottenendo

$$\begin{aligned}\int_0^{1/2} \sqrt{2z - z^2}\, dz &= \int_{-1}^{-1/2} \sqrt{1 - x^2}\, dx \\ &= \int_{1/2}^{1} \sqrt{1 - x^2}\, dx.\end{aligned}$$

Questo offre

$$\int_A f = 8 \int_{1/2}^{1} \sqrt{1 - z^2}\, dz.$$

Con il cambio di variabile $z = \sin t$ si ha

$$\int_{1/2}^{1} \sqrt{1 - z^2}\, dz = \frac{1}{2} \int_{\pi/6}^{\pi/2} (1 + \cos(2t))\; dt = \frac{1}{4}\left(\frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

Concludiamo che $\int_A f = \left(\frac{4\pi}{3} - \sqrt{3}\right)$. □

29. Utilizzare il teorema di Tonelli per provare che se $f : E \to [0, +\infty]$ è misurabile, allora

$$\begin{aligned}\int_E f(x)dx &= m_{n+1}\Big(\big\{(x,t) \in \mathbb{R}^{n+1} : x \in E,\ 0 \le t \le f(x)\big\}\Big) \\ &= \int_0^{+\infty} \mathbf{m}_n\Big(\big\{x \in E : f(x) \ge t\big\}\Big)dt.\end{aligned}$$

30. Ponendo $\omega_n = \mathbf{m}_n\big(B(0,1)\big)$, ove $B(0,1) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\}$, provare che

$$\int_{B_n(0,r)} \frac{1}{|x|^\alpha}\, dx = \begin{cases} \dfrac{n\omega_n r^{n-\alpha}}{n - \alpha} & \text{se } \alpha < n \\ +\infty & \text{se } \alpha \ge n \end{cases}.$$

Sugg. Usare l'esercizio precedente con

$$E = \big\{(x,t) \in \mathbb{R}^{n+1} : 0 < |x| < r,\ 0 \le t \le |x|^{-\alpha}\big\},$$

che corrisponde al sottografico della funzione $x \to |x|^{-\alpha}$.

31. Ragionando come nell'esercizio precedente, provare che

$$\int_{\mathbb{R}^n \setminus B(0,r)} \frac{1}{|x|^\alpha} dxdy = \begin{cases} \dfrac{n\omega_n r^{n-\alpha}}{(\alpha - n)} & \text{se } \alpha > n \\ +\infty & \text{se } \alpha \le n \end{cases}.$$