

## Analisi II. Foglio di esercizi n.5

1/12/2017

(Aggiornamento del 9/3/2018)

Esercizi sull'integrazione rispetto la misura di superficie

1. Consideriamo l'*astroide*  $\gamma(\varphi) = r(\cos^3 \varphi, \sin^3 \varphi)$  con  $r > 0$  e  $\varphi \in [0, 2\pi]$ .

(a) Tracciare il grafico della curva nel piano.

(b) Calcolare l'area dell'insieme limitato  $A$  delimitato da tale curva.

*Sugg.* Utilizzare la 1-forma differenziale d'area  $\frac{1}{2}(xdy - ydx)$ , oppure osservare che la curva soddisfa l'equazione  $|x|^{2/3} + |y|^{2/3} = r^{2/3}$  e utilizzare le simmetrie.

2. Calcolare l'area dell'insieme

$$E = \{(t \cos \varphi, t \sin \varphi) \in \mathbb{R}^2 : 0 < \varphi < \pi, 0 < t < 1 + \sin(2\varphi)\}.$$

*Sugg.* Utilizzare la 1-forma differenziale d'area  $\frac{1}{2}\rho^2 d\varphi$ .

3. Sia  $\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z^2 - x^2 - y^2 = 0 \text{ e } 0 \leq z \leq 2\}$ . Tracciare un grafico qualitativo di  $\Sigma$  e calcolarne l'area.

4. Sia  $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : -2 + 2x^2 + 2y^2 < z < 2 - 2x^2 - 2y^2\}$ . Si tracci il grafico di tale insieme e si calcoli l'area di  $\partial\Omega$ .

5. Scrivere il valore dell'area del grafico di  $u : B \rightarrow \mathbb{R}$ , dove abbiamo definito  $u(x, y) = x + y^2 - x^2 - y$  e

$$B = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 < \frac{1}{4} \right\}.$$

6. Sia  $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$  la superficie di rotazione ottenuta ruotando  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $\gamma(t) = (0, t^2, t^4 + 1)$  attorno all'asse  $z$ . Calcolare l'area di  $\Sigma$ .

7. Sia  $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 - |z| - \frac{3}{4} < 0, |z| < \frac{1}{2}\}$ . Sia

$$\Sigma = \partial\Omega \setminus \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : |z| = \frac{1}{2} \right\}$$

e  $\nu$  la normale esterna di  $\Omega$ . Dato  $F(x, y, z) = (y - z, x + z, z)$ , calcolare il flusso  $\Phi(F, \Sigma, \nu)$ .

8. Data  $\Sigma = \{(x, y, z) : 0 = e^{\sin x} - y + \log(2 + \cos(zx)), x^4 + z^4 < 1\}$ . Sia  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  una curva chiusa e semplice di classe  $C^1$  la cui immagine è  $\partial H$  con  $H = \{(x, z) \in \mathbb{R}^2 : x^4 + z^4 < 1\}$  e che orienta positivamente tale aperto. Calcolare  $\int_{\Phi \circ \gamma} x dx + y dy + z dz$ , dove

$$\Phi(x, z) = (x, e^{\sin x} + \log(2 + \cos(xz)), z).$$

9. Consideriamo il campo vettoriale  $F(x, y) = (e^x - y^2 x, e^{-\sin y} + y x^2)$  e l'aperto

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y^2 - x^2 < 1, 0 < x < \sqrt{3}, y > 0\}.$$

Sia  $\Gamma$  la curva  $C^1$  a tratti iniettiva, che percorre tutto l'insieme  $\partial\Omega$  in senso orario. Scrivere il valore di  $\int_{\Gamma} F$ , argomentando la risposta.

10. Consideriamo il campo vettoriale  $F(x, y) = (x^2 - y^2, x^2 + y^2)$  e l'aperto

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y < 1, y - x < 1, y > 0\}.$$

Sia  $\Gamma$  la curva  $C^1$  a tratti e semplice, la cui immagine è  $\partial\Omega$  e che percorre tale insieme in senso antiorario. Calcolare  $\int_{\Gamma} F$ .

11. Calcolare l'area dell'insieme  $E \subset \mathbb{R}^2$  delimitato dalle curve  $\gamma(t) = (t^2 e^t, t^2)$  su  $[0, 1]$  e  $c(t) = (te, t)$  su  $[0, 1]$ .

12. Consideriamo il seguente insieme aperto

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + z^2 - 4 < 0 \text{ e } x^2 + z^2 - 1 < y < 5\}$$

e sia  $\nu$  la sua normale esterna nei punti di frontiera regolare. Introduciamo il campo vettoriale

$$F(x, y, z) = \left( \frac{2z}{y+2}, 1 + x^3 \sin(y\pi), \frac{xz}{y+4} \right),$$

il quale è ben definito su  $\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y < 5\} \cap \partial\Omega$ . Calcolare  $\int_{\Sigma} \langle \text{rot } F, \nu \rangle d\sigma$ .

13. Sia  $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 < z < 1\}$  e definiamo il campo vettoriale  $F(x, y, z) = (xz, xy, 1)$ . Considerando la superficie elementare

$$\Sigma = \{(x, y, x^2 + y^2) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 < 1\}$$

e la normale esterna  $\nu$  ad  $\Omega$ , calcolare il flusso  $\int_{\Sigma} \langle F, \nu \rangle d\sigma$ .

14. Sia  $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + z^2 < y < 4, y > 1\}$  e si consideri il campo vettoriale  $F(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{y}}(x, 0, z)$ , il quale è ben definito su

$$\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 1 < y < 4\} \cap \partial\Omega.$$

Calcolare il flusso  $\int_{\Sigma} \langle F, \nu \rangle d\sigma$ , dove  $\nu$  è la normale esterna ad  $\Omega$  e  $\sigma$  denota la misura di superficie 2-dimensionale.

15. Consideriamo la superficie elementare con bordo

$$\Sigma = \{(x, y, z) : x + 2y + 3z = 1, x, y, z \geq 0\}.$$

- (a) Sia  $\gamma$  la curva  $C^1$  a tratti, semplice e chiusa, la cui immagine è il bordo  $\partial\Sigma$  e che passa nell'ordine per  $(1, 0, 0)$ ,  $(0, 1/2, 0)$  e  $(0, 0, 1/3)$ . Calcolare la circuitazione  $\int_{\gamma} ydx - xdy + ydz$ , sia per calcolo diretto che attraverso un opportuno utilizzo del teorema di Stokes.
- (b) Data  $\nu$  normale a  $\Sigma$  tale che abbia seconda componente positiva e dato  $F(x, y, z) = (x - y, y + z, x + y)$ , calcolare il flusso  $\Phi(F, \Sigma, \nu)$ .

16. Consideriamo l'insieme

$$\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y^2 + z^2 - (x - 1)^2 = 0, |x| \leq 1\}$$

ed il campo vettoriale  $F = (xyz + yz, xz + x^4, 2x^2zy)$ .

- (a) Si tracci un grafico qualitativo di tale insieme.
- (b) Calcolare  $\int_{\Sigma} \langle \text{rot } F, \nu \rangle d\sigma$ , dove  $\nu$  è la normale a  $\Sigma$  nei punti 2-regolari e la cui prima componente è positiva.

17. Si consideri l'insieme  $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1, y + z \leq 2, z \geq 0\}$ .

- (a) Tracciare un grafico qualitativo di  $C$ , determinando il suo bordo e provando che è costituito da curve regolari.
- (b) Determinare una parametrizzazione  $\gamma$  della parte superiore del bordo tale che la sua composizione con la proiezione sul piano  $xy$  determini una curva orientata in senso antiorario.
- (c) Calcolare la circuitazione  $\int_{\gamma} x^2(1 - z)dx + y^2(1 - z)dy + (x^2 + y^2)dz$ , sia direttamente che utilizzando opportunamente il teorema di Stokes.  
*Suggerimento:* Occorre trovare la giusta scelta della normale  $\nu$  a  $C$ .

18. Consideriamo gli aperti

$$\Omega_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \max\{|x|, |y|\} < 2 \text{ e } 0 < z < 1\},$$

$$\Omega_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 < 4 \text{ e } z > 0\}$$

e si definisca  $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ . Dati  $F(x, y, z) = (x, x, zxy)$  e

$$\Sigma = \overline{(\partial\Omega)} \setminus \overline{\{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 : x, y \in \mathbb{R}\}}$$

superficie regolare a tratti, con normale esterna  $\nu$  ad  $\Omega$  nei punti  $\partial_{reg}\Omega$ , si calcoli

$$\int_{\Sigma} \langle \text{rot } F, \nu \rangle d\sigma.$$

19. Dati  $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 - 1 < z < 1 - \sqrt{x^2 + y^2}\}$  ed il campo

$$F(x, y, z) = (z^5 + e^y + xy, \log(2 + z) + y, x^7 y^3 + zx^3),$$

calcolare  $\Phi(F, \partial\Omega, \nu)$ , dove  $\nu$  è la normale esterna su  $\partial_{reg}\Omega$ .

20. Consideriamo l'insieme

$$\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0, x \leq 2^{-1}, y \leq 2^{-1}\}.$$

(a) Tracciare un grafico qualitativo di  $\Sigma$ .

(b) Orientando  $\Sigma$  con la normale  $\nu(x, y, z) = (x, y, z)$ , calcolare

$$\int_{\partial^+ \Sigma} y dx + (x - z^2) dy + xz dz.$$

21. Consideriamo l'insieme aperto

$$\Omega = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{4} < 1, x^2 + (y - 2)^2 + z^2 > 1 \right\},$$

ed il campo  $F(x, y, z) = (x + y, y - 2, z - xy)$ .

(a) Tracciare un grafico qualitativo di  $\Omega$ .

*Suggerimento:* Provare che  $\partial B((0, 2, 0), 1)$  è contenuto nell'aperto

$$H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{4} < 1\}.$$

(b) Determinare  $\partial\Omega$ ,  $\partial_{reg}\Omega$  e la normale esterna  $\nu$  ad  $\Omega$ .

(c) Calcolare sia  $\Phi(F, \partial\Omega, \nu)$  che  $\Phi(F, \Sigma, \nu)$ , dove  $\Sigma = \partial H$ .

22. Sia  $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 - |z| - \frac{3}{4} < 0, |z| < \frac{1}{2}\}$ .

- (a) Provare che  $\Omega$  è limitato e stabilire se  $\partial\Omega$  è una superficie regolare a tratti.
- (b) Tracciarne un grafico qualitativo evidenziando un asse di simmetria.
- (c) Sia  $\Sigma = \partial\Omega \setminus \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : |z| = \frac{1}{2}\}$  e  $\nu$  la normale esterna di  $\Omega$ . Calcolare  $\Phi(\text{rot } G, \Sigma, \nu)$ , dove  $G(x, y, z) = (x^2 - y, zy^2, z)$ .

23. Definiamo l'insieme

$$\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z + (y - x)^2 + x^2 = 1, (y - x)^2 + x^2 \leq 1\}.$$

- (a) Stabilire se tutti i punti del bordo  $\partial\Sigma$  sono regolari.  
*Suggerimento:* Osservare che  $(y - x)^2 + x^2 = 1$  è una curva di classe  $C^1$  e chiusa (trattasi precisamente di un'ellisse).
- (b) Calcolare  $\Phi(F, \Sigma, \nu)$ , dove  $F(x, y, z) = (e^z - y^8, z^8 - e^x, 1 + x)$  e  $\nu$  è la normale a  $\Sigma$  con terza componente ovunque positiva.
- (c) Calcolare  $\int_{\gamma} (xz^2 + x)dx + (yx^2 + z)dy + (xy^2 + x)dz$ , dove  $\gamma$  è la curva che percorre interamente una ed una sola volta il bordo  $\partial\Sigma$  in senso antiorario.