Analisi II. Foglio di esercizi n.2
12/10/2018
(Aggiornamento del 22/10/2018)

`Esercizi su integrali curvilinei e potenziali`

1. Provare che $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (t, |t|)$, è C^1 a tratti su $\mathbb{R}$. Per ogni $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$ calcolarne la lunghezza della restrizione $\gamma|_{[a,b]}$.

2. Si consideri la curva $\gamma(t) = (2\cos t, \sin t)$ su $[0, 2\pi]$ e si calcoli
$$\int_\gamma (1 + 3y^2)^{-1/2}\, ds.$$

3. Consideriamo $\Gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$, ove $\Gamma(t) = \big(e^t, t^2\big)$ per ogni $t \in [0,1]$. Scrivere il valore di $\int_\Gamma \sqrt{4y + x^2}\, ds$.

4. Dati $L > 0$ e $\gamma(t) = (t, 1-t)$ su $[0, L]$, calcolare
$$\int_\gamma (e^{|y|} - x)\, ds.$$

5. Si consideri la "cicloide", ovvero la curva ottenuta da un punto fissato ad una ruota che rotola su una retta senza slittamenti. Verificare che il punto ha coordinate
$$\gamma(\theta) = (R\theta - R\sin\theta, R - R\cos\theta).$$
Calcolare la lunghezza del tratto percorso dal punto sulla ruota, quando ha compiuto un intero giro.

6. Data $\gamma : [-2, 1] \to \mathbb{R}^3$, $\gamma(t) = \big(t^2, t^2|1+t|, \frac{t^3}{3}\big)$. Provare che γ è C^1 a tratti.

7. Calcolare la lunghezza di $\gamma : [\frac{1}{\sqrt{15}} - \frac{1}{4}, \frac{2}{\sqrt{15}} - \frac{1}{4}] \to \mathbb{R}^3$, definita come
$$\gamma(t) = \left(\frac{t^2}{2}, \frac{2}{\sqrt{15}}t^2 + \sqrt{\frac{5}{3}}\,t^3, \frac{t^3}{3}\right).$$
Sugg. Usare la formula $\int_0^t \sqrt{1+x^2}dx = \frac{1}{2}\Big(\log(t + \sqrt{1+t^2}) + t\sqrt{1+t^2}\Big)$.

8. Calcolare la lunghezza di $\gamma : [-2, 1] \to \mathbb{R}^3$, $\gamma(t) = (t^2, t^3, t^3)$.

9. Data la 1-forma differenziale $\eta_0 = -\dfrac{y}{x^2+y^2}dx + \dfrac{x}{x^2+y^2}dy$ e consideriamo
$$\gamma(t) = (t^2 + \log(e^t + t^8))\,(\cos t, \sin t)$$

definita su $(0,2\pi)$. Calcolare, se esiste,

$$\int_\gamma \eta_0 := \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{\gamma|_{[\varepsilon,2\pi-\varepsilon]}} \eta_0$$

Sugg. Considerare la funzione arcocoseno.

10. Si consideri la 1-forma differenziale

$$\omega = xdx + e^z dy + ye^z dz$$

e la curva $\gamma(t) = (e^{e^{(\cos t - \sin^2 t)}}, \log(1+e^{-t^2+\cos t}), \frac{1}{1+t^4})$ sull'intervallo $[0,\pi]$. Calcolare $\int_\gamma \omega$.

11. Data $\gamma(t) = (t, 1-t, t^2)$ su $[0,\sqrt{2}]$, calcolare $\int_\gamma \left(|x+y| + \sqrt{|z|}\right) ds$.

Sugg. Usare la formula $\int_0^t \sqrt{1+x^2}dx = \dfrac{1}{2}\left(\log(t+\sqrt{1+t^2}) + t\sqrt{1+t^2}\right)$.

12. Si consideri la curva $\gamma(t) = (\log(1+e^t), 1, \cos(\pi t))$ su $[0,1]$ e si calcoli $\int_\gamma F$, ove $F = \left(\dfrac{z}{y}, -\dfrac{xz}{y^2}, \dfrac{x}{y}\right)$.

13. Si consideri la seguente curva $\gamma(t) = \left(-t^3, 2e^{\sin(\pi t)}, \sin(\pi t)\right)$ su $[0,1]$. Si calcoli l'integrale $\int_\Gamma F$, ove $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ è definita come

$$F = \left(\frac{x^3}{1+x^4+y^4+z^4}, \frac{y^3}{1+x^4+y^4+z^4}, \frac{z^3}{1+x^4+y^4+z^4}\right).$$

14. Consideriamo la 1-forma differenziale ω definita come segue

$$\left(\cos(\alpha y) + e^{\beta x}y^3 - x\right)dx + \left(3y^2e^x - x\sin y + z\cos(yz)\right)dy + y\cos(yz)dz.$$

Stabilire per quali α e β reali la 1-forma differenziale ω è esatta in $\mathbb{R}^3$.

15. Stabilire se esistono e nel caso determinare gli α reali tali che il campo $F : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}^2$, ove

$$F(x,y) = \left(\frac{\alpha y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right),$$

sia conservativo in $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x, y > 0\}$. Per tali α, nel caso esistano, calcolare un potenziale di F su Ω.

16. Stabilire se il campo vettoriale

$$F(x,y) = \big(-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\big)$$

è conservativo sull'aperto $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$, dandone una breve argomentazione. Data la curva $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$,

$$\gamma(t) = \big((1-t)\cos(\pi - t\pi), 1 + (1-t)\sin(\pi - t\pi)\big),$$

scrivere il valore dell'integrale $\int_\gamma F$.

17. Scrivere l'unica funzione potenziale $V : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ del campo

$$F(x,y) = \left(\frac{\cos(x+y)}{2+\sin(x+y)}, \frac{\cos(x+y)}{2+\sin(x+y)}\right)$$

tale che $V(0,0) = \log 4$.

18. Sia data la 1-forma differenziale $\omega = \dfrac{dx}{(1+y)(1+x)^2} + \dfrac{dy}{(1+x)(1+y)^2}$. Definendo la curva $\gamma : [0, \sqrt{\pi}] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = \big(e^{\sin(t^2)}, e^{\cos(t^2)}\big)$, si scriva il valore di $\int_\gamma \omega$.

19. Consideriamo $F(x,y) = (x+y, x-y)$ e $\gamma(t) = (t, e^t)$ su $[0,1]$.

    (a) Stabilire se F è conservativo in $\mathbb{R}^2$.

    (b) Calcolare $\int_\gamma F$.

20. Consideriamo la forma differenziale

$$\omega = \big(2xyz + y^2z - y + 2z\big)dx + \big(x^2z + 2xyz - x - 4\big)dy + \big(x^2y + xy^2 + 2x + 1\big)dz$$

e la curva $\gamma(t) = (\sin t, t, e^t)$ su $[0, \pi]$.

    (a) Stabilire se ω è esatta in $\mathbb{R}^3$.

    (b) Calcolare $\int_\gamma \omega$.

21. Sia data la 1-forma differenziale $\omega_\alpha = xydx + dy + \frac{\alpha x^2}{2}dy$.

    (a) Stabilire per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ la 1-forma differenziale ω_α è esatta in $\mathbb{R}^2$.

    (b) Per tali $\alpha \in \mathbb{R}$ determinarne una primitiva f_α.

22. Al variare di $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, sia data la 1-forma differenziale

$$\omega_{\alpha,\beta} = y(x-z)dx + (\alpha x^2 + \beta z^2 - xz)dy + y(z-x)dz.$$

(a) Determinare per quali $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ la 1-forma differenziale $\omega_{\alpha,\beta}$ è esatta in $\mathbb{R}^3$.

(b) Per tali α, β determinarne una primitiva di ω_α e calcolare $\int_\gamma \omega_{\alpha,\beta}$, dove abbiamo definito $\gamma(t) = (t, \operatorname{tg} t, \sin t)$ su $[0, \pi/4]$

23. Consideriamo $F : \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\} \to \mathbb{R}^3$,

$$F(x,y,z) = \left(\frac{y^2+z^2-x^2}{(x^2+y^2+z^2)^2}, -\frac{2xy}{(x^2+y^2+z^2)^2}, -\frac{2xz}{(x^2+y^2+z^2)^2} \right).$$

Stabilire se F è conservativo in $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ ed in tal caso determinarne un potenziale.

24. Determinare il più grande dominio della 1-forma differenziale

$$\omega = -\frac{x}{x^2-y^2-z^2}dx + \frac{y}{x^2-y^2-z^2}dy + \frac{z}{x^2-y^2-z^2}dz$$

e stabilire se ha una primitiva in tale dominio.

25. Determinare tutti i valori $p \in \mathbb{R}$ tali che il campo vettoriale

$$F = \left(\frac{x}{(x^2+y^2+z^2+t^2)^p}, \frac{y}{(x^2+y^2+z^2+t^2)^p}, \frac{z}{(x^2+y^2+z^2+t^2)^p}, \frac{t}{(x^2+y^2+z^2+t^2)^p} \right)$$

sia conservativo in $\mathbb{R}^4 \setminus \{(0,0,0,0)\}$ e per essi determinarne un potenziale.

26. **(Avanzato)** Consideriamo l'aperto $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0,\ y \neq 0\}$ ed il campo $F : \Omega \to \mathbb{R}^2$ definito come segue

$$F(x,y) = \left(\frac{\sigma_y |y|^q}{(x^2+y^2)^p}, \frac{\sigma_x |x|^q}{(x^2+y^2)^p} \right),$$

dove $p, q \in \mathbb{R}$. La funzione segno soddisfa $\sigma_t = 1$ se $t > 0$, $\sigma_0 = 0$ e $\sigma_t = -1$ se $t < 0$. Determinare per quali coppie (p,q) il campo F è conservativo, ed in tal caso calcolarne la funzione potenziale. Svolgimento. Osserviamo che Ω è sconnesso in quatttro aperti semplicemente connessi, pertanto anche in caso di chiusura potranno esserci più potenziali, sommando diverse costanti sui diversi aperti semplicemente connessi. Studiamo quindi la validità della condizione di chiusura:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F_1}{\partial y} &= \sigma_y (x^2+y^2)^{-2p} \left(q|y|^{q-1}\sigma_y (x^2+y^2)^p - |y|^q p (x^2+y^2)^{p-1} 2y \right) \\
\frac{\partial F_2}{\partial x} &= \sigma_x (x^2+y^2)^{-2p} \left(q|x|^{q-1}\sigma_x (x^2+y^2)^p - |x|^q p (x^2+y^2)^{p-1} 2x \right)
\end{aligned}$$

imponendo quindi che per ogni $(x, y) \in \Omega$ debba valere

$$\begin{aligned} & q|y|^{q-1}(x^2+y^2)^p - \sigma_y |y|^q p (x^2+y^2)^{p-1} 2y \\ = \; & q|x|^{q-1}(x^2+y^2)^p - \sigma_x |x|^q p (x^2+y^2)^{p-1} 2x, \end{aligned}$$

ovvero moltiplicando per $(x^2+y^2)^{1-p}$ abbiamo

$$q|y|^{q-1}(x^2+y^2) - \sigma_y |y|^q p 2y = q|x|^{q-1}(x^2+y^2) - \sigma_x |x|^q p 2x$$

ed essendo $t\sigma_t = |t|$, ne viene

$$q|y|^{q-1}(x^2+y^2) - |y|^{q+1} p 2 = q|x|^{q-1}(x^2+y^2) - |x|^{q+1} p 2$$

e raccogliendo abbiamo

$$|y|^{q-1}\left(q(x^2+y^2) - 2py^2\right) = |x|^{q-1}\left(q(x^2+y^2) - 2px^2\right),$$

ovvero

$$|y|^{q-1}\left(qx^2 + (q-2p)y^2\right) = |x|^{q-1}\left((q-2p)x^2 + qy^2\right)$$

deve valere per ogni $(x, y) \in \Omega$.

`Caso` $q = 0$

Otteniamo la condizione

$$-2p|y| = -2p|x|$$

che può essere verificata solo se $p = 0$, pertanto il campo è irrotazionale per

$$q = 0 \quad \text{e} \quad p = 0.$$

`Caso` $q < 1$ `e` $q \neq 0$

Consideriamo quindi $x = 1$, ovvero

$$|y|^{q-1}\left(q + (q-2p)y^2\right) = \left((q-2p) + qy^2\right)$$

che porta ad una contraddizione per $y \to 0$.

`Caso` $q = 1$

Otteniamo quindi

$$x^2 + (1-2p)y^2 = (1-2p)x^2 + y^2$$

ovvero

$$2p(x^2 - y^2) = 0,$$

che vale per ogni $(x, y) \in \Omega$ se e solo se $p = 0$. Concludiamo che in questo caso il campo è irrotazionale per

$$q = 1 \quad \text{e} \quad p = 0.$$

Caso $q > 1$

La validità dell'uguaglianza

$$|y|^{q-1}\left(qx^2 + (q-2p)y^2\right) = |x|^{q-1}\left((q-2p)x^2 + qy^2\right)$$

in Ω permette di considerare il limite per $y \to 0$, ottenendo

$$0 = |x|^{q-1}\left((q-2p)x^2\right) \quad \text{ovvero} \quad (q-2p)x^2 = 0$$

che è verificata se e solo se $q = 2p$. Sostituendo nell'uguaglianza iniziale otteniamo

$$qx^2|y|^{q-1} = qy^2|x|^{q-1} \quad \text{ovvero} \quad |y|^{q-3} = |x|^{q-3}$$

che è verificata se e solo se $q = 3$. Pertanto in questo caso la chiusura si ha per

$$q = 3 \quad \text{e} \quad p = \frac{3}{2}.$$

Potenziale per $q = 0$ e $p = 0$

Se $q = 0$ e $p = 0$, allora $F = (\sigma_x, \sigma_y)$ e quindi abbiamo

$$V(x, y) = |x| + |y|$$

su Ω. Osserviamo inoltre che poiché Ω è sconnesso non tutti i potenziali si ottengono aggiungendo una costante a V. Ad esempio possiamo definire

$$\tilde{V}(x, y) = \begin{cases} |x| + |y| & \text{se } (x, y) \in \Omega \text{ e } y > 0 \\ |x| + |y| + 1 & \text{se } (x, y) \in \Omega \text{ e } y < 0 \end{cases}$$

che soddisfa $\nabla\tilde{V} = (\sigma_x, \sigma_y)$ ma non è ottenibile aggiungendo una costante a V.

`Potenziale per` $q = 1$ `e` $p = 0$

In questo caso abbiamo $F = (y, x)$, dove il potenziale si individua immediatamente

$$V(x, y) = xy.$$

La non unicità di tale differenziale su Ω è da intendersi come nel caso $q = p = 0$.

`Potenziale per` $q = 3$ `e` $p = 3/2$

In questo caso abbiamo

$$F = \left(\frac{y^3}{(x^2 + y^2)^{3/2}}, \frac{x^3}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \right).$$

Sappiamo che esiste $V : \Omega \to \mathbb{R}$ che soddisfa

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{y^3}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \quad \text{e} \quad \frac{\partial V}{\partial y} = \frac{x^3}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$$

ma l'integrazione lungo rette parallele agli assi non conviene. Consideriamo invece la curva $\gamma_\varepsilon : [\varepsilon, 1] \to \Omega$ con $\varepsilon \in (0, 1)$, $\gamma_\varepsilon(t) = t(x, y)$ e $(x, y) \in \Omega$. Allora esiste il limite

$$\begin{aligned} V(x, y) &= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{\gamma_\varepsilon} F = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_\varepsilon^1 \left(\frac{y^3 x}{(x^2 + y^2)^{3/2}} + \frac{x^3 y}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \right) dt \\ &= \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}. \end{aligned}$$

Si può infine verificare che $V(x, y) = (xy)/\sqrt{x^2 + y^2}$ soddisfa

$$\nabla V(x, y) = \left(\frac{y^3}{(x^2 + y^2)^{3/2}}, \frac{x^3}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \right).$$

per ogni $(x, y) \in \Omega$.