

Complementi di Analisi Matematica. Foglio di esercizi n.7

23/4/2019

Esercizi su sistemi di equazioni differenziali

Esercizio 1 Si consideri il sistema

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = 2y_2 - y_1 \\ \dot{y}_2 = y_2 - 2y_1 \end{cases} .$$

1. Determinare una base di soluzioni.
2. Determinare i punti di equilibrio e studiarne la stabilità.
3. Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = 2y_2 - y_1 \\ \dot{y}_2 = y_2 - 2y_1 \\ y_1(-1) = 0 \\ y_2(-1) = 2 \end{cases} .$$

Esercizio 2 Si consideri il sistema lineare

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = 2y_1 + 5y_2 \\ \dot{y}_2 = -2y_2 + y_1 \end{cases} .$$

1. Trovare tutte le soluzioni del sistema, ovvero una sua base di soluzioni.
2. Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = 2y_1 + 5y_2 \\ \dot{y}_2 = -2y_2 + y_1 \\ y_1(0) = 1 \\ y_2(0) = 2 \end{cases} .$$

3. Classificare i punti di equilibrio tra stabili, instabili o asintoticamente stabili.
4. Tracciare un grafico qualitativo delle orbite del sistema, assieme ai versi di percorrenza.

Esercizio 3 Consideriamo

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = 2y_2 - y_1 \\ \dot{y}_2 = -y_2 - 2y_1 \end{cases}$$

1. Determinare una base di soluzioni.
2. Determinare i punti di equilibrio e studiarne la stabilità.
3. Tracciare un grafico qualitativo delle orbite evidenziando i versi di percorrenza.

Esercizio 4 Si consideri il sistema lineare

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = 2y_2 - y_1 \\ \dot{y}_2 = y_2 - 2y_1 \end{cases} .$$

1. Trovare una base di soluzioni del sistema.
2. Determinare i punti di equilibrio e studiarne la stabilità.
3. Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = 2y_2 - y_1 \\ \dot{y}_2 = y_2 - 2y_1 \\ y_1(0) = 1 \\ y_2(0) = -1 \end{cases} .$$

Esercizio 5 Consideriamo il sistema lineare

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_1 - 2y_2 \\ \dot{y}_2 = y_2 \end{cases} .$$

1. Risolvere la seconda equazione, sostituendola nella prima, quindi determinare una base di soluzioni del sistema.
2. Determinare l'autovettore relativo alla radice caratteristica del sistema e tracciare un grafico qualitativo di tutte le soluzioni.
3. Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_1 - 2y_2 \\ \dot{y}_2 = y_2 \\ y_1(10) = -10 \\ y_2(10) = 11 \end{cases}$$

Esercizio 6 Consideriamo il sistema lineare

$$\begin{cases} x' = 5x - 3y + 2z \\ y' = 6x - 4y + 4z \\ z' = 4x - 4y + 5z \end{cases} .$$

1. Determinare una base di soluzioni.
2. Studiare la stabilità dei punti di equilibrio.

Esercizio 7 Consideriamo il sistema lineare

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = -y_1 + y_2 \\ \dot{y}_2 = y_2 - y_3 \\ \dot{y}_3 = -y_2 + y_3 \end{cases} .$$

1. Determinare una base di soluzioni.
2. Determinare i punti di equilibrio e studiarne la stabilità.

Esercizio 8 Consideriamo il sistema

$$\begin{cases} x' = y - 3 \\ y' = 2x + 2 \end{cases} .$$

1. Trovare tutte le soluzioni del sistema.
2. Tracciare il grafico qualitativo di tutte le orbite delle soluzioni.
3. Studiare la stabilità dei punti di equilibrio.

Suggerimento. Fare il cambiamento di variabile $y_1 = x + 1$ e $y_2 = y - 3$, ottenendo un sistema lineare nelle nuove variabili.