Corso: Teoria Geometrica della Misura
Docente: Valentino Magnani
Anno Accademico: 2012-2013
Ore svolte: 42
Crediti formativi: 6
Laurea in Matematica. Semestre II.

Università di Pisa
Dipartimento di Matematica
Largo Bruno Pontecorvo 5
I-56127, Pisa
magnani@dm.unipi.it

Programma svolto

1. (a) Misure esterne, misure su σ-algebre. Estensione Borel regolari e di Radon. Teorema di estensione di funzioni d'insieme subadditive. Unicità delle estensioni regolari rispetto una σ-algebra. Misure boreliane e Borel regolari.
   (b) Spazi topologici localmente compatti, di Hausdorff, soddisfacenti il secondo assioma di numerabilità e numerabilmente chiusi. Teoremi di approssimazione interna per misure boreliane e Borel regolari. Teoremi di approssimazione esterna per misure boreliane e Borel regolari. Misure di Radon. Criterio per avere misure di Radon su spazi LCHN2. Misure vettoriali e loro variazione totale.
   (c) Teorema di Lusin I: restrizione continua su un insieme "grande". Teorema di Lusin II : approssimazione con una funzione continua in norma L^1. Teorema di esistenza di una misura di Radon associata ad un funzionale lineare numerabilmente limitato su uno spazio LCH. Teorema di rappresentazione di Riesz per funzionali numerabilmente limitati su uno spazio LCH.

2. (a) Teorema di ricoprimento di tipo Vitali rispetto una famiglia di insiemi con una funzione reale nonnegativa limitata su tale insieme. Teorema di ricoprimento rispetto famiglie di palle metriche generali, rispetto famiglie di chiusi e rispetto famiglie di palle chiuse. Relazioni di ricoprimento e di Vitali. Teorema sull'esistenza di relazioni di Vitali per misure asintoticamente e uniformemente doubling. Teorema di derivabilità quasi ovunque per le funzioni monotone di una variabile.
   (b) Funzioni gauge e misura di Carathéodory. Misura di Hausdorff e misura di Hausdorff sferica. Limiti di funzioni d'insieme rispetto relazioni di ricoprimento. Quattro teoremi di differenziabilità di misure rispetto la funzione gauge.
   (c) Insiemi di Cantor ed esistenza dei frattali di Hutchinson. Formula per la loro dimensione di Hausdorff *(senza dimostrazione)*. Derivate di misure rispetto le palle metriche chiuse e differenziabilità di misure rispetto misure che supportano una relazione di Vitali *(senza dimostrazione)*. Teorema di differenzazione di Lebesgue in spazi metrici con misura asintoticamente uniformemente doubling.

3. (a) Disuguaglianza di Brunn-Minkowski, disuguaglianza isodiametrica, uguaglianza tra misura di Hausdorff, misura di Hausdorff sferica di dimensione n e misura di Lebesgue $\mathcal{L}^n$ in $\mathbb{R}^n$. Funzioni assolutamente continue di una variabile reale e funzione di Cantor.
   (b) Teorema di estensione lipschitziana in spazi euclidei, teorema di unicità della derivata distribuzionale e teorema di Rademacher. Punti di densità di un insieme e proprietà asintotica della funzione distanza da tale insieme. Unicità del differenziale nei punti di densità.

4. (a) Elementi di algebra multilineare: multivettore, prodotto esterno, mappa alternante, dualità tra multivettori e mappe alternanti, prodotto scalare tra multivettori, prodotto esterno iterato di una mappa lineare e jacobiano di una mappa lineare rispetto un prodotto scalare fissato.
   (b) Jacobiano come rapporto tra misura di Hausdorff dell'immagine e misura di Lebesgue di un insieme misurabile con misura positiva tramite una mappa lineare. Teoremi di linearizzazione, di trascurabilità dell'immagine dei punti singolari e formula dell'area per mappe lipschitziane vettoriali di più variabili.
   (c) Misurabilità della misura delle preimmagini per mappe lipschitziane. Integrale superiore e disuguaglianza di Eilenberg-Federer. Insiemi rettificabili, numerabilmente rettificabili e numerabilmente $\mathcal{H}^k$-rettificabili. Formula di coarea ristretta all'insieme dei punti di differenziabilità ove il differenziale è suriettivo. Trascurabilità di q.o. insieme di livello intersecato con i punti singolari, q.o. insieme di livello è numerabilmente $\mathcal{H}^{n-m}$-rettificabile e formula di coarea per mappa lipschitziane da un misurabile di $\mathbb{R}^n$ a valori in $\mathbb{R}^m$, con $n > m$.
5. (a) Misure vettoriali e misure di Radon vettoriali. Dualità tra misure di Radon vettoriali e funzionali sulle funzioni continue a supporto compatto di uno spazio LCH. Convergenza debole, semicontinuità e compattezza delle misure vettoriali di Radon. Spazi di funzioni a variazione limitata in $\mathbb{R}^n$.
   (b) Insiemi di perimetro finito, misura perimetro e normale esterna generalizzata. Domini aperti regolari. Contenuto di Minkowski $n-1$ dimensionale in $\mathbb{R}^n$ e relativa espressione della disuguaglianza isoperimetrica. Disuguaglianza di immersione di Sobolev per funzioni liscie a variazione limitata e integrabili. Disuguaglianza isoperimetrica con costante ottimale. Spazi di Sobolev.
   (c) Disuguaglianza di Gagliardo-Nirenberg con costante ottimale. Disuguaglianza isoperimetrica locale *(senza dimostrazione)*. Teorema della divergenza su intersezioni di insiemi di perimetro finito con palle metriche euclidee. Frontiera ridotta. Stime di densità per i punti di frontiera ridotta sia rispetto la misura di Lebesgue, che rispetto la misura perimetro.
   (d) Misure immagine e cambio di variabile rispetto alla misura immagine *(senza dimostrazione)*. Compattezza degli insiemi riscalati rispetto la convergenza L^1_{loc}. Esistenza del blow-up nei punti di frontiera ridotta. Il blow-up è un semispazio. Reciproca assoluta continuità tra misura perimetro e restrizione della misura di Hausdorff $n-1$ dimensionale alla frontiera ridotta. Teorema di rettificabilità di De Giorgi: la frontiera ridotta è numerabilmente $\mathcal{H}^{n-1}$-rettificabile.

Precisazioni sul programma

Le dimostrazioni di teoremi, disuguaglianze o enunciati indicati nel programma sono anch'esse da intendersi come parte del programma, in assenza di ulteriori specificazioni.

Riferimenti

L. Ambrosio, G. Fusco, D. Pallara. "Functions of Bounded Variation and Free Discontinuity Problems", Oxford Univerity Press, 2000

L. C. Evans e R. F. Gariepy. "Measure theory and fine properties of functions", CRC Press, 1992.

H. Federer. "Geometric Measure Theory ", Springer-Verlag, 1969.

L. Simon. "Lectures on Geometric Measure Theory ", Australian National University, Centre for Mathematical Analysis, 1984.

W. Ziemer. "Weakly differentiable functions.Sobolev spaces and functions of bounded variation ", Springer-Verlag, 1989