

A.A. 2002–2003
Corso di Laurea in Fisica
Geometria I e II – Appello del 18/6/2003

Esercizio 1 (G1, G1+2, VO)

Sia U il sottospazio di \mathbb{R}^4 descritto dalle equazioni

$$\begin{cases} x + 2y - z + t = 0 \\ y + 2z - t = 0 \end{cases}$$

e, al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$, sia $W_\lambda = \text{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 - \lambda \\ \lambda - 1 \\ 1 \\ 1 - 3\lambda \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 - \lambda \\ -1 + \lambda \\ -1 \\ 3 - 3\lambda \end{pmatrix} \right\}$.

Per quali valori di $\lambda \in \mathbb{R}$, $\mathbb{R}^4 = U \oplus W_\lambda$?

Esercizio 2 (G1)

Sia V uno spazio vettoriale sul campo \mathbb{K} di dimensione n , e sia W un sottospazio di V di dimensione m . Si consideri l'insieme

$$U = \{f : V \rightarrow V \text{ lineari tali che } \forall w \in W \exists \alpha \in \mathbb{K} : f(w) = \alpha w\}$$

Dimostrare che U è un sottospazio di $\text{Hom}(V, V)$ e calcolarne la dimensione.

Esercizio 3 (G1, G1+2, VO)

Sia $A \in {}_n\mathbb{R}_n$ la matrice i cui coefficienti sono tutti uguali ad 1, e sia $D \in {}_n\mathbb{R}_n$ la matrice diagonale in cui l'elemento di posto (1,1) vale n , e tutti gli altri valgono 0. Dimostrare che la matrice A è simile alla matrice D .

Esercizio 4 (G1)

Sia φ il prodotto scalare su \mathbb{R}^4 , definito rispetto alla base canonica dalla matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 3 & 1 & -2 & 6 \end{pmatrix}$$

e sia $W = \text{Span}\{(0, 1, 0, 1), (1, 0, -1, 0)\}$.

- (1) Calcolare la segnatura di φ .
- (2) Calcolare una base per W^\perp .
- (3) Esibire un sottospazio di \mathbb{R}^4 di dimensione pari all'indice di positività di φ tale che la restrizione di φ a tale sottospazio sia definita positiva.

Esercizio 5 (G2, G1+2, VO)

Sia φ il prodotto scalare su \mathbb{R}^3 , definito rispetto alla base canonica dalla matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

U il sottospazio di \mathbb{R}^3 descritto dall'equazione $x = y$, $W = \text{Span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$, C il cono dei vettori φ -isotropi, Π_k il piano descritto dall'equazione $z = k$ ($k \in \mathbb{R}$).

(1) U e $W =$ sono φ -isometrici?

(2) Rappresentare tramite φ il funzionale $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ definito da

$$f \left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right) = -3x + 4y + 3z.$$

(3) Studiare al variare di $k \in \mathbb{R}$ il tipo affine della conica data dall'intersezione di C e Π_k .

Esercizio 6 (G2, G1+2, VO)

Trovare una base di $\mathbb{R}_3[x]$ in cui la matrice associata all'applicazione lineare $F : \mathbb{R}_3[x] \rightarrow \mathbb{R}_3[x]$, definita da $F(p(x)) = p(0)x^3 + 6p'(x)$, coincida con la forma canonica di Jordan di F .

Esercizio 7 (G2)

Dimostrare che un trapezio è isoscele se e solo se le affinità che lo fissano sono isometrie.

Dimostrare che un triangolo è isoscele se e soltanto se tra le 6 affinità che lo fissano almeno 2 sono isometrie.