A. A. 2004/2005 CORSO di LAUREA in FISICA
GEOMETRIA I e II Compito del 18/01/2005

Esercizio 1(G1, R1, G1+2)
Si considerino i seguenti sottospazi di $\mathbb{R}^3$:

$$V_1 = \mathrm{Span}((1,0,0),(0,1,1)), \quad V_2 = \mathrm{Span}((0,1,0),(-1,0,-1))$$

(1) Costruire una applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ tale che:
- $\mathrm{Im} f = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x+t=0,\ x+y-z=0\}$
- $f|_{V_1}$ e $f|_{V_2}$ siano iniettive.

(2) Calcolare $f(3,2,0)$.

Esercizio 2(G1, R1)
Per ogni $f \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^n)$ si consideri il sottoinsieme $W_f = \{g \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^n) \mid g \circ f = f \circ g\}$.

(1) Verificare che W_f è un sottospazio di $\mathrm{End}(\mathbb{R}^n)$.
(2) Dimostrare che se $f' = h \circ f \circ h^{-1}$ per qualche $h \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^n)$ allora $\dim W_{f'} = \dim W_f$.
(3) Supponiamo che f sia diagonalizzabile. Dimostrare che $\dim W_f = n$ se e solo se f ha n autovalori distinti.

Esercizio 3(G1, R2)
Sia ϕ il prodotto scalare su $\mathbb{R}^4$ associato, rispetto alla base canonica, alla matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 4 & 4 \\ 2 & 2 & 4 & 4 \end{pmatrix}.$$

1) Calcolare la segnatura di ϕ.
2) Dimostrare che $\phi|_W$ è degenere su ogni sottospazio W di dimensione 3.
3) Dimostrare che, se W è un sottospazio di dimensione 3 e $\phi|_W \equiv 0$, allora il radicale di ϕ è contenuto in W.
4) Dimostrare che esistono esattamente 2 sottospazi W di dimensione 3 per cui $\phi|_W \equiv 0$.

Esercizio 4(G1, R2, G1+2)
Siano A, B due matrici reali simmetriche $n \times n$. Dimostrare che:

1) AB è simmetrica se e solo se $AB = BA$,
2) se AB è simmetrica, allora esiste un autovettore comune per A e B,
3) se AB è simmetrica, allora esiste una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$ (rispetto al prodotto scalare ordinario) formata da autovettori comuni per A e B.

Sigle dell'esame: G1 = Geometria I; R1 = Recupero primo compitino; R2 = Recupero secondo compitino G2 = Geometria II; G1+2 = Vecchio ordinamento e Geometria I+II. Durata: R1 e R2 2 ore; G1, G2 e G1+2 3 ore. Scrivere subito sul foglio: nome, numero di marticola e sigla dell'esame.

A. A. 2004/2005 CORSO di LAUREA in FISICA
GEOMETRIA I e II Compito del 18/01/2005

Esercizio 5.(G2, G1+2)
Dimostrare che $f \in$End(C^3) é diagonalizzabile se e solo se esistono 3 o piú sottospazi di $\mathbb{C}^3$ di dimensione 2 f-invarianti.

Esercizio 6.(G2, G1+2)
Sia $V = \mathbb{R}_3[x]$ e siano $F, G \in V^*$ i funzionali definiti da $F(p) = p(0)$, $G(p) = p(1)$, per ogni $p \in V$.
1) Dimostare che non esiste nessun prodotto scalare su V tale che F si rappresenti con x^3 e G si rappresenti con x^2.
2) Costruire un prodotto scalare su V non degenere di indice di Witt massimo tale che F si rappresenti con x^3 e G si rappresenti con 1.

Esercizio 7.(G2)
1) Al variare dei parametri $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ determinare tutti i tipi affini delle coniche $C_{\lambda,\mu}$ di equazione $\lambda x^2 + \mu y^2 + 2\lambda x + 2\mu y = 0$.
2) Determinare una affinitá che porti $C_{1,4}$ in forma normale.

[0] Sigle dell'esame: G1 = Geometria I; R1 = Recupero primo compitino; R2 = Recupero secondo compitino G2 = Geometria II; G1+2 = Vecchio ordinamento e Geometria I+II. Durata: R1 e R2 2 ore; G1, G2 e G1+2 3 ore. Scrivere subito sul foglio: nome, numero di marticola e sigla dell'esame.