A. A. 2006/2007
CORSO di LAUREA in FISICA
GEOMETRIA II
Compitino del 29/3/2007

Sia V uno spazio vettoriale sul campo $\mathbb{K}$ di dimensione n, e siano $f_1, \ldots, f_n$ una base di V^*.

1) Dimostrare che esiste una base $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ di V tale che $f_i(v_j) = 0$ se $1 \leq i \neq j \leq n$ e $f_i(v_i) = 1$ per $1 \leq i \leq n$.

Sia φ il prodotto scalare su V definito da

$$\varphi(v, w) = \sum_{k=1}^{n-1} \Big(f_k(v) f_{k+1}(w) + f_{k+1}(v) f_k(w) \Big)$$

per ogni $v, w \in V$.

2) Dimostrare che se n è pari allora φ è non degenere, mentre se n è dispari $\dim \mathrm{Rad}(\varphi) = 1$.

3) Nel caso n pari, rappresentare f_1 e f_2 tramite φ esprimendo il risultato nella base $\mathcal{B}$. Si possono rappresentare anche nel caso n dispari?

4) Per $n = 4$ e $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ o $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, dimostrare che per ogni $1 \leq i, j \leq n$ $\ker f_i$ e $\ker f_j$ sono φ-congruenti (cioè esiste un'isometria $f \in \mathrm{O}(\varphi)$ che mandi uno nell'altro).

5) Per $n = 4$, dire se è possibile decomporre V in somma ortogonale di piani iperbolici.