A. A. 2006/2007

CORSO di LAUREA in FISICA

GEOMETRIA II

Compitino del 31/5/2007

Esercizio 1.
Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{C}$ di dimensione n. Determinare gli endomorfismi $f \in \mathrm{End}(V)$ tali che f e $g \circ f$ sono coniugati per ogni $g \in \mathrm{GL}(V)$.

Esercizio 2.
Un'affinità $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ si dice una dilatazione se esistono $P \in \mathbb{R}^2$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$ tali che, per ogni $Q \in \mathbb{R}^2$, $F(Q) - P = \lambda(Q - P)$. P si dice il centro della dilatazione.
1) Dimostrare che la composizione di due dilatazioni è una dilatazione o una traslazione.
2) Dimostrare che un'affinità di $\mathbb{R}^2$ che manda ogni retta in una retta ad essa parallela ed ha almeno un punto fisso è una dilatazione.
3) Dimostrare che un'affinità $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ commuta con una dilatazione di centro P se e solo se P è un punto fisso di f.

Esercizio 3.
Siano $C_1, C_2 \subset \mathbb{R}^2$ le coniche di equazioni $x^2+2xy+2y^2-2x-4y-6 = 0$ e $x^2+xy+y^2+2x+4y = 0$ rispettivamente.
1) Dire se C_1 e C_2 sono affinemente equivalenti e in tal caso dire se sono isometricamente equivalenti.
2) Mostrare che il segmento di estremi i centri di C_1 e C_2 interseca C_1 in un solo punto, che chiameremo P_1, e interseca C_2 in un solo punto, che chiameremo P_2.
3) Esiste una parabola tangente a C_1 in P_1 e tangente a C_2 in P_2?