A. A. 2008/2009
CORSO di LAUREA in FISICA
GEOMETRIA I
Compito dell'8/9/2009

Esercizio 1
Si consideri il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ definito da

$$W = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + 2z - t = 0, 2x - y + 3z = 0, x - 2y + 3t = 0\}.$$

1) Calcolare la dimensione di W e determinarne una base.
2) Sia $v = (3, 1, 0, 1)$. Verificare che l'insieme

$$E = \{f \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^4) \mid W \subseteq \mathrm{Ker}\, f,\ v \text{ è autovettore per } f\}$$

è un sottospazio vettoriale di $\mathrm{End}(\mathbb{R}^4)$ e calcolarne la dimensione.

Esercizio 2
Siano A e B matrici reali $n \times n$ triangolabili.

1) Provare che, se U è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ e $B(U) \subseteq U$, allora la restrizione $B|_U : U \to U$ è triangolabile.
2) Provare che, se $AB = BA$, ogni autospazio per A contiene un vettore che è autovettore anche per B.
3) Provare che, se $AB = BA$, esiste una base di $\mathbb{R}^n$ che è a bandiera sia per A che per B.

Esercizio 3
Sia ψ_k il prodotto scalare su $\mathbb{R}^4$ definito da $\psi_k(X, Y) = {}^tXA_kY$ per ogni $X, Y \in \mathbb{R}^4$, dove

$$A_k = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & k \\ 0 & k & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ k & 0 & 1 & -k \end{pmatrix}$$

1) Se W è il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ generato dai vettori $v_1 = (0, 1, 0, 0)$ e $v_2 = (0, 0, 1, 0)$, si discuta, al variare del parametro reale k, la segnatura della restrizione di ψ_k a W.
2) Si discuta, al variare del parametro reale k, la segnatura di ψ_k.
3) Per $k = 0$, si calcoli una base di $\mathbb{R}^4$ ortogonale per ψ_k.

Durata: 3 ore.
Scrivere su tutti i fogli nome e numero di matricola.

A. A. 2008/2009
CORSO di LAUREA in FISICA
GEOMETRIA II
Compito dell'8/9/2009

Esercizio 4
Sia V uno spazio vettoriale sul campo $\mathbb{K}$ di caratteristica diversa da 2. Siano $f : V \to V$ un endomorfismo e φ un prodotto scalare non degenere su V tali che $\varphi(v, f(v)) = 0$ per ogni $v \in V$.
1) Dimostrare che per ogni $\lambda \in$Spettro(f), $\lambda \neq 0$, dimKer$(f - \lambda id) \leq w(\varphi)$, dove $w(\varphi)$ è l'indice di Witt di φ.
2) Dimostrare che, se $w(\varphi) = 1$, allora lo spettro di f contiene al più 2 elementi diversi da 0.
3) Per $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ e dim$V = 3$, dimostrare che $0 \in$Spettro(f) e che se Spettro$(f) \neq \{0\}$ allora Spettro$(f) = \{0, z, -z\}$, con $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$.

Esercizio 5
Al variare di $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, si consideri la matrice

$$A_{\lambda,\mu} = \begin{pmatrix} \mu & 1-\mu & \lambda^2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^2-\lambda & 0 \\ -\lambda & \lambda & 0 & \lambda \\ \mu & 1-\mu & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Per $1 \leq k \leq 4$, determinare i valori di λ e μ tali che $A_{\lambda,\mu}$ ha polimonio minimo x^k e determinare le possibili forme canoniche di Jordan in tali casi.

Esercizio 6
Sia $F \subset \mathbb{R}^2$ l'unione dei segmenti di vertici $(1,1)(5,5)$, $(1,1)(-1,1)$, $(2,2)(2,1)$, $(4,4)(2,4)$, e $(5,5)(5,4)$.
1) Esiste un'affinità $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f \neq id$ tale che $f(F) = F$?
Per $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $a < b$, sia $F' \subset \mathbb{R}^2$ l'unione dei segmenti di vertici $(0,a)(0,7)$, $(0,7)(2,6)$, $(0,1)(2,0)$, $(0,a)(d, a+c)$, e $(0,b)(d, b+c)$.
2) Determinare i valori di a, b, c, d per cui esiste un'affinità $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, tale che $g(F) = F'$ e $g((5,5)) = (0,7)$.

Durata: 3 ore.
Scrivere su tutti i fogli nome e numero di matricola.