**A. A. 2008/2009 CORSO di LAUREA in FISICA**
**GEOMETRIA I Compito del 14/1/2009**

**Esercizio 1** [C1]
Sia $V$ un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale di dimensione $n$ e sia $W$ un sottospazio vettoriale di $V$ di dimensione $p \geq 1$. Sia

$$E = \{f \in \mathrm{End}(V) \mid \exists \lambda \in \mathbb{K} \text{ tale che } W \subseteq V(\lambda, f)\},$$

dove $V(\lambda, f)$ denota l'autospazio per $f$ relativo all'autovalore $\lambda$.
Dire se $E$ è un sottospazio vettoriale di $\mathrm{End}(V)$ e, in caso affermativo, calcolarne la dimensione.

**Esercizio 2** [C1]
Al variare del parametro reale $h$, si consideri l'applicazione lineare $f_h \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ definita da

$$f_h(x, y, z) = (hx + hy + 2hz, -hx - 3z, hx + hy + 2z, 2hx + 2hy + (2 + 2h)z).$$

Sia $W$ il sottospazio di $\mathbb{R}^4$ generato dai vettori $(1, -1, 1, 0)$ e $(-1, -2, 1, 2)$.

(1) Determinare equazioni cartesiane per $W$.
(2) Al variare di $h \in \mathbb{R}$, calcolare la dimensione di $\mathrm{Im}\, f_h$.
(3) Dire per quali valori di $h$ si ha $\mathrm{Im}\, f_h \subseteq W$.
(4) Dire per quali valori di $h$ si ha $\dim(\mathrm{Im}\, f_h \cap \mathrm{Im}\, f_2) = 1$.

**Esercizio 3** [C2]
Al variare del parametro reale $k$ si considerino le matrici di $M(3, \mathbb{R})$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad B_k = \begin{pmatrix} 0 & k & 1 \\ 1 & 1-k & -1 \\ -k & k & k+1 \end{pmatrix}.$$

(1) Dire se $A$ è diagonalizzabile e determinare equazioni cartesiane per i suoi autospazi.
(2) Determinare i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui esiste una base di $\mathbb{R}^3$ costituita da autovettori sia per $A$ che per $B_k$.

**Esercizio 4** [C2]
Sia $V$ uno spazio vettoriale reale di dimensione $n$ dotato di un prodotto scalare $\phi$ definito positivo e sia $f$ un endomorfismo simmetrico di $V$ (rispetto a $\phi$). Provare che, per ogni intero $r$ con $1 \leq r \leq n$, esiste un endomorfismo simmetrico $g$ di $V$ tale che $f + g$ è simmetrico e $\mathrm{rk}(f + g) = r$.

---

Sigle dell'esame: C1 = recupero primo compitino; C2 = recupero secondo compitino.
Durata: compito 3 ore, recupero compitini 1,5 ore.
Scrivere su tutti i fogli nome e numero di matricola.

**A. A. 2008/2009**
**CORSO di LAUREA in FISICA**
**GEOMETRIA II**
**Compito del 14/1/2009**

## Esercizio 1

Siano $V$ e $W$ due $\mathbb{K}$-spazi vettoriali e siano $\varphi$ e $\psi$ due prodotti scalari su $V$ e su $W$, rispettivamente. Sullo spazio vettoriale $Z = V \times W$ definiamo $H : Z \times Z \to \mathbb{K}$ tramite la formula,

$$H((v_1, w_1), (v_2, w_2)) = \varphi(v_1, v_2) + \psi(w_1, w_2) \ \forall \, v_1, v_2 \in V, w_1, w_2 \in W.$$

a) Mostrare che $H$ è un prodotto scalare su $Z$.
b) Mostrare che per ogni $(V, \varphi)$ con $\varphi$ non degenere, esiste $(W, \psi)$ tale che $(Z, H)$ è somma diretta ortogonale di piani iperbolici.
c) Se $\dim V = n$, mostrare che si può scegliere $(W, \psi)$ come sopra in modo tale che $\dim W = n - 2\mathrm{witt}(\varphi)$.
d) È possibile determinare $(W, \psi)$ come sopra con $\dim W < n - 2\mathrm{witt}(\varphi)$?

## Esercizio 2

Sia $A \in {}_n\mathbb{C}_n$ una matrice complessa di taglia $n \times n$.
1) Dimostrare che esistono due matrici $S, N \in {}_n\mathbb{C}_n$ tali che $S$ è diagonalizzabile e $N$ è nilpotente, $SN = NS$ e $A = S + N$.
2) Dimostrare per induzione su $k$ che, se $p_1, ..., p_k \in \mathbb{C}[x]$ sono polinomi a due a due coprimi, allora per ogni $\lambda_1, ..., \lambda_k \in \mathbb{C}$ esiste un polinomio $q \in \mathbb{C}[x]$ tale che $q - \lambda_i \in (p_i)$ per ogni $i = 1, .., k$ (dove con $(p)$ si indica l'ideale generato da $p$).
3) Dimostrare che esistono due polinomi $p, q \in \mathbb{C}[x]$ tali che $S = p(A)$ e $N = q(A)$. (Hint: usare i polinomi $(x - \lambda)^m$ per opportuni $\lambda$ e $m$.)

## Esercizio 3

Dati $\alpha_1, .., \alpha_6 \in \mathbb{R}[\lambda]$ polinomi dello stesso grado, consideriamo la conica $C_\lambda \subset \mathbb{R}^2$ di equazione $\alpha_1 x^2 + \alpha_2 y^2 + 2\alpha_3 xy + 2\alpha_4 x + 2\alpha_5 y + \alpha_6 = 0$.
1) Dimostrare che se gli $\alpha_i$ sono monici di grado 1 allora esiste un unico valore di $\lambda \in \mathbb{R}$ per cui $C_\lambda$ è degenere.
2) Produrre un esempio in cui gli $\alpha_i$ siano monici e $C_\lambda$ sia degenere per esattamente 2 valori di $\lambda$.
3) Nel caso $\alpha_i = \lambda - i + 1$, determinare il tipo affine di $C_\lambda$ al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$.

---

Durata: 3 ore.
Scrivere su tutti i fogli nome e numero di matricola.