A. A. 2008/2009
CORSO di LAUREA in FISICA
GEOMETRIA II
Compitino del 1/6/2009

Esercizio 1.
Sia V uno spazio vettoriale sul campo $\mathbb{K}$ di caratteristica diversa da 2, di dimensione dim $V = n > 0$ e sia φ un prodotto scalare non degenere su V. Se $W \subset V$ è un sottospazio, definiamo $w(\varphi_{|_W}) = \max\{\dim Z \mid Z \subset W$ è un sottospazio tale che $\varphi_{|_Z} = 0\}$, dove la definizione ha senso anche se $\varphi_{|_W}$ è degenere.
Supponiamo che esistano $0 < k \leq n$ e $0 \leq h \leq k$ tali che per ogni sottospazio $W \subset V$, dim $W = k$ si abbia $w(\varphi_{|_W}) = h$.
1) Dimostrare che $h < k$ e $w(\varphi) = h$ (hint: studiare separatamente il caso $h = 0$).
2) Dimostrare che $k \geq n - 1$.
3) Nel caso $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, dimostrare che se n è pari allora $k = n$, mentre se n è dispari anche $k = n - 1$ soddisfa alle ipotesi.

Esercizio 2.
Dati $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$ positivi, siano $R_1, R_2 \subset \mathbb{R}^2$ i rombi di vertici $(0, 0)$, $(a_1, -b_1)$, $(2a_1, 0)$ e (a_1, b_1), e $(0, 0)$, $(-a_2, -b_2)$, $(-2a_2, 0)$ e $(-a_2, b_2)$, rispettivamente.
Calcolare, in funzione di a_1, a_2, b_1, b_2 il numero di affinità $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tali che $f(R_1 \cup R_2) = R_1 \cup R_2$.