Corso di Geometria Analitica e Algebra Lineare
Primo compitino - 5/12/2014

Esercizio 1. Per ogni numero naturale $m \geq 1$, si consideri l'applicazione $f_m : \mathbb{R}_m[x] \to S(2)$ definita da $f_m(p) = \begin{pmatrix} p(0) & p(1) \\ p(1) & p(2) \end{pmatrix}$ per ogni $p \in \mathbb{R}_m[x]$, dove $S(2) = \{A \in M(2, \mathbb{R}) \mid {}^{\mathsf{T}}\!A = A\}$.

a) Si verifichi che f_m è lineare.

b) Si determinino i valori di m tali che f_m è iniettiva.

c) Si determinino i valori di m tali che f_m è surgettiva.

d) Fissato $m = 1$, si costruisca, se esiste, un'applicazione lineare $g : S(2) \to \mathbb{R}_2[x]$ che verifichi le seguenti condizioni:

   i) $g \circ f_1$ è iniettiva,

   ii) $g(A) = 1 - 3x + 2x^2$, dove $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

   iii) $g(S(2)) = \{p(x) \in \mathbb{R}_2[x] \mid p(3) = 0\}$.

Esercizio 2. Dire, giustificando la risposta, quali delle seguenti affermazioni sono vere e quali false.

a) Sia n numero naturale, $n > 2$. Siano W un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ di dimensione $n-1$ e $g \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^n)$ un endomorfismo tale che la restrizione di g a W è iniettiva. Allora esiste $f \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^n)$ tale che $f^2 = 0$ e $\mathbb{R}^n = \mathrm{Im}\, f \oplus \mathrm{Ker}\, g$.

b) Sia $A \in M(n, \mathbb{K})$ una matrice non nulla tale che $A \neq \alpha I$ per ogni $\alpha \in \mathbb{K}$. Sia $f_A : M(n, \mathbb{K}) \to M(n, \mathbb{K})$ l'applicazione lineare definita da $f_A(X) = AX - XA$ per ogni $X \in M(n, \mathbb{K})$. Allora esiste $B \in M(n, \mathbb{K})$ non nulla tale che $B \in \mathrm{Ker}\, f_A$ e $tr(B) = 0$, dove $tr(B)$ denota la traccia di B.

c) Siano $A_1, A_2, B_1, B_2 \in M(n, \mathbb{R})$ matrici non nulle e si denoti con $\equiv_{SD}$ la relazione di SD-equivalenza. Se $A_1 B_1 \equiv_{SD} A_2 B_2$ e $A_1 \equiv_{SD} A_2$ allora $B_1 \equiv_{SD} B_2$.

Esercizio 3. Si considerino le rette

$$r = \{(2 + t, 1, t - 1) \in \mathbb{R}^3 |\ t \in \mathbb{R}\}$$

$$s = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 |\ x + y + 1 = 0, y - z - 3 = 0\}.$$

a) Si dica se r e s sono sghembe.

b) Si determini, se esiste, una retta l tale che $(3, 0, -1) \in l$, $l \cap r \neq \emptyset$ e $l \cap s \neq \emptyset$. Se tale retta l esiste, si determinino $l \cap r$ e $l \cap s$.

c) È vero che per ogni punto $Q \in \mathbb{R}^3$ esiste una retta ρ tale che $Q \in \rho$, $\rho \cap r \neq \emptyset$ e $\rho \cap s \neq \emptyset$?