Corso di Geometria 1 - A.A. 2015-2016

Primo compitino - 9/12/2015 - FILA 1

Esercizio 1. Sia $V = \mathbb{R}_3[x]$ e sia $W = \{p(x) \in V \mid p(1) = 0\}$.

a) Posto $Z_h = Span(-2h - 2 + hx + 2x^2 + x^3, h - x^2, 2 - hx - x^3)$, si determinino i valori di $h \in \mathbb{R}$ per cui $\dim(Z_h \cap W) = 1$.

b) Sia $q(x) = x^3 + x - 1$. Si mostri che esiste $f \in \mathrm{End}(V)$ che verifica le seguenti proprietà:

(i) $\dim \mathrm{Im}\, f \leq 2$,

(ii) esiste $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che $f(p) = \lambda p \quad \forall p \in W$,

(iii) $f(q) = q$.

c) Si verifichi che l'insieme

$$E = \{f \in End(V) \mid \dim \mathrm{Im}\, f \leq 2,\ \exists \lambda \in \mathbb{R} \text{ tale che } f(p) = \lambda p \quad \forall p \in W\}$$

è un sottospazio vettoriale di $\mathrm{End}(V)$ e se ne calcoli la dimensione.

Esercizio 2. Siano $f, g \in \mathrm{End}(V)$ endomorfismi di uno spazio vettoriale V tali che $f^2 = 0$, $g^2 = 0$, $f \circ g + g \circ f = id$. Si provi che:

a) $f(\mathrm{Ker}\, g) = \mathrm{Ker}\, f, \quad g(\mathrm{Ker}\, f) = \mathrm{Ker}\, g, \quad V = \mathrm{Ker}\, f \oplus \mathrm{Ker}\, g$,

b) V ha dimensione pari,

c) se $\dim V = 2$, esiste una base $\mathcal{B}$ di V tale che $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ e $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(g) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Esercizio 3. Dire, giustificando la risposta, quali delle seguenti affermazioni sono vere e quali false.

a) Al variare di $h \in \mathbb{R}$ si considerino i punti

$$P_1 = (2, 1, 0), \quad P_2 = (1, 0, -1), \quad P_3 = (0, 2, 0), \quad Q_h = (3 + h, h - 1, 2h - 2).$$

Sia $L(P_1, P_2)$ (risp. $L(P_3, Q_h)$) la retta congiungente P_1 e P_2 (risp. congiungente P_3 e Q_h). Per ogni $h \in \mathbb{R}$ l'unico sottospazio affine di $\mathbb{R}^3$ contenente $L(P_1, P_2) \cup L(P_3, Q_h)$ è $\mathbb{R}^3$ stesso.

b) Sia $f : V \to W$ un'applicazione lineare non nulla e siano U_1, U_2 sottospazi vettoriali distinti di V tali che $U_1 \cap U_2 = \{0\}$. Se $(U_1 + U_2) \cap \mathrm{Ker}\, f = \{0\}$, allora $f(U_1 + U_2) = f(U_1) \oplus f(U_2)$.

c) Siano U, W sottospazi di uno spazio vettoriale V di dimensione finita tali che $V = U \oplus W$. Siano $pr_U : V \to V$ e $pr_W : V \to V$ le proiezioni rispettivamente su U e W indotte dalla decomposizione $V = U \oplus W$. Se pr_U e pr_W sono SD-equivalenti, allora V ha dimensione pari.

d) Sia $\mathcal{C}$ la base canonica di $\mathbb{R}^2$. Per ogni $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ sia $f_{a,b} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ l'applicazione definita da

$$f_{a,b}(x, y) = \det \begin{pmatrix} a & b \\ x & y \end{pmatrix} \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Allora $f_{a,b} \in (\mathbb{R}^2)^*$ e per ogni $(h, k) \in \mathbb{R}^2$ esiste $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tale che le coordinate di $f_{a,b}$ nella base duale $\mathcal{C}^*$ siano $\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}$.

Corso di Geometria 1 - A.A. 2015-2016

Primo compitino - 9/12/2015 - FILA 2

Esercizio 1. Dire, giustificando la risposta, quali delle seguenti affermazioni sono vere e quali false.

a) In $\mathbb{R}^3$ sia r la retta congiungente i punti $P_1 = (-2, 3, 0)$ e $P_2 = (1, 0, -1)$ e sia s la retta congiungente i punti $P_3 = (0, 2, 0)$ e $Q_h = (2 + 2h, h - 1, h - 1)$. Per ogni $h \in \mathbb{R}$ l'unico sottospazio affine di $\mathbb{R}^3$ contenente $r \cup s$ è $\mathbb{R}^3$ stesso.

b) Sia $f\colon V \to W$ un'applicazione lineare non nulla e siano U_1, U_2 sottospazi vettoriali distinti di V tali che $U_1 \cap U_2 = \{0\}$. Se $(U_1 + U_2) \cap \operatorname{Ker} f = \{0\}$, allora $f(U_1 + U_2) = f(U_1) \oplus f(U_2)$.

c) Sia $\mathcal{C}$ la base canonica di $\mathbb{R}^2$. Per ogni $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ sia $f_{a,b}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ l'applicazione definita da

$$f_{a,b}(x, y) = \det \begin{pmatrix} x & y \\ a & b \end{pmatrix} \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Allora $f_{a,b} \in (\mathbb{R}^2)^*$ e per ogni $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ esiste $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tale che le coordinate di $f_{a,b}$ nella base duale $\mathcal{C}^*$ siano $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$.

d) Siano U, W sottospazi di uno spazio vettoriale V di dimensione finita tali che $V = U \oplus W$. Siano $pr_U\colon V \to V$ e $pr_W\colon V \to V$ le proiezioni rispettivamente su U e W indotte dalla decomposizione $V = U \oplus W$. Se pr_U e pr_W sono SD-equivalenti, allora V ha dimensione pari.

Esercizio 2. Sia $V = \mathbb{R}_3[x]$ e sia $W = \{p(x) \in V \mid p(-1) = 0\}$.

a) Posto $Z_h = Span(2 - 3h + hx + 3x^2 + x^3, h - x^2, 2 + hx + x^3)$, si determinino i valori di $h \in \mathbb{R}$ per cui $\dim(Z_h \cap W) = 1$.

b) Sia $q(x) = x^2 - 2x - 1$. Si mostri che esiste $f \in \operatorname{End}(V)$ che verifica le seguenti proprietà:

(i) $\dim \operatorname{Im} f \leq 2$,

(ii) esiste $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che $f(p) = \lambda p \quad \forall p \in W$,

(iii) $f(q) = 3q$.

c) Si verifichi che l'insieme

$$E = \{f \in \operatorname{End}(V) \mid \exists \lambda \in \mathbb{R} \text{ tale che } f(p) = \lambda p \quad \forall p \in W,\ \dim \operatorname{Im} f \leq 2\}$$

è un sottospazio vettoriale di $\operatorname{End}(V)$ e se ne calcoli la dimensione.

Esercizio 3. Siano $f, g \in \operatorname{End}(V)$ endomorfismi di uno spazio vettoriale V tali che $f^2 = 0$, $g^2 = 0$, $f \circ g + g \circ f = id$. Si provi che:

a) $f(\operatorname{Ker} g) = \operatorname{Ker} f, \quad g(\operatorname{Ker} f) = \operatorname{Ker} g, \quad V = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Ker} g$,

b) V ha dimensione pari,

c) se $\dim V = 2$, esiste una base $\mathcal{B}$ di V tale che $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ e $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(g) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.